$$x + 10 = 30 + 6x$$

$$2x + 36 = x^2 + 6x$$

$$2x - x = 6x - 36$$

$$x + 14 = \frac{x + 35}{2}$$

$$2x + 28 = x + 35$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$a^{-m} \cdot a^{2m} = a^{-m}$

$a^{-m} \cdot a^{2m} = a^{m}$

$a^{b-y} = \frac{1}{a^{y-b}}$

Ribot. 1514

K. KREIS BIBLIOTHEK
RATZEBURG

Gottfr. Eichler del. Jac. Andr. Fridrich Ser. Duc. Würt. Sculptor aulicus Sc. Ul.

Heinrich Wilhelm Clemms
mathematisches
Lehrbuch,
oder
vollständiger Auszug
aus allen
so wohl zur reinen als angewandten Mathematik gehörigen Wissenschaften,
nebst einem Anhang
oder kurzen Entwurf
der Naturgeschichte und Experimentalphysik.

KREISBIBLIOTHEK REGENSBURG

Mit XXIV. Kupfertafeln.

Dritte verbesserte Auflage.

Stutgart
bey Johann Benedict Mezler
1777.

Zur Königl.
Bibliothek
in Regensburg.

Dem

Durchlauchtigsten

Herzog und Herrn,

HERRN

CARL

Herzog zu Wirtemberg und Teck, Gra-ven zu Mömpelgard, Herrn zu Heydenheim und Justingen, Rittern des goldenen Vliesses und des Schwäbischen Kreises General-Feldmarschall ꝛc.

Seinem

gnädigsten Herzog und Herrn

wiedmet

diese Schrift

mit tiefster und unterthänigster

Ehrfurcht

der

Verfasser.

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Herzog und Herr!

Euer Herzoglichen Durchlaucht höchste Gnade gegen die Wissenschaften ist so groß und ausgebreitet, daß ich es nicht wagen sollte, Höchstderoselben Durchlauchtigsten Namen, der nur für Meisterstücke und Hauptwerke der Gelehrten vom ersten Range eine Zierde seyn soll, gegenwärtigem Lehrbuche vorzusetzen, und von Höchstdemselben seinen Glanz zu borgen.

Diß war auch wirklich die Ursache, die mich bey der ersten Auflage dißfalls zurückhielt und schüchtern machte.

Da aber die in Zeit von drey Jahren schon wieder betriebene zweyte Ausgabe diesem Buch einige Dauer verspricht, vorzüglich aber Euer Herzogl. Durchlaucht selbst es gnädigst anzusehen geruhet haben: so erkühne mich in tiefster Ehrfurcht, Höchstdenenselben es unterthänigst zu Füssen zu legen, um durch höchst-Dero glorreichsten Namen ihm erst seinen wahren Werth zu verschaffen, und zugleich für die mir zugewandte höchste Gnade meine submisseste Devotion offentlich und vor den Augen der Welt zu bezeugen.

Euer Herzogl. Durchlaucht haben, wenn ich mich dieses Ausdrucks bedienen darf, unter den grosen allgemeinen und unpartheyischen

Landesvätern des gesammten Reichs der Wissenschaften einen vorzüglichen Rang; und dieses hohe Bild schwebt mir dergestalt vor den Augen, daß ich mir sonst allemal, nur alsdann nicht, wann ich es ansehe, Unbedachtsamkeit und Dreistigkeit wegen meinem gegenwärtigen Unternehmen vorwerfen müßte.

Euer Herzogl. Durchlaucht wollen also gnädigst erlauben, daß ich dieses Buch mit allem devotesten Respect unterthänigst überreichen, und zugleich, weil doch die Mathematik mit unter die Dienerinnen der Religion gehöret, deren Vertheidigung Höchstdieselbe mit dem theologischen Lehramte mir ohnelängst gnädigst anbefohlen haben, demüthigst hoffen darf, daß **Euer Herzogl. Durchlaucht** sich es gnädigst gefallen lassen, wenn ich auf diese ehemalen von mir offentlich vorgetragene Wissenschaft auch jezo noch zuweilen einige Blicke zurückwerfe.

Der

Der Allmächtige, der es eben dadurch auch in seinem Reich helle macht, wann er hie und da Könige und Fürsten setzt, die den Glanz der Wissenschaften ausbreiten, wolle **Euer Herzogl. Durchlaucht** kostbares Leben bis auf die späteste Zeiten erhalten. Das ist der Wunsch, den mit dem Wunsch aller Liebhaber der wahren Gelehrsamkeit vereinigt

Euer Herzoglichen Durchlaucht

meines gnädigsten Herzogs und Herrn

Tübingen den 20. Merz
1768.

unterthänigster Knecht

D. Heinrich Wilhelm Clemm.

Vorbericht

zur ersten Auflage.

Die mathematische Wissenschaften, in so fern sie einem Menschen, der eben nicht bloß damit seinen Unterhalt sucht oder davon zu leben gedenket, theils Vergnügen theils Nutzen schaffen sollen, müssen ohne Abbruch der Deutlichkeit und Gründlichkeit, so viel möglich, in einer angenehmen Kürze vorgetragen werden. Denn man kann ihm, da er nach seinem Hauptzweck noch so viel anders zu lernen hat, keine mathematische Quartanten und Folianten in die Hände geben; giebt man ihm aber ein mageres Compendium in die Hand, wo nur die vornehmste Sätze stehen, bey deren Beweis man ihn auf grösere Bücher verweißt, so bekommt sein Verstand nichts reelles zu denken,

und er wird entweder die Künste des Geometers mit den Unwissenden bewundern, oder wenn er klüger ist, das Buch hinweg legen, bis er ein besser demonstrirtes zu lesen bekommt; wollte man ihm endlich gar solche ins kleine gebrachte Schriften, zu lesen geben, worinnen der tiefsinnige Meßkünstler seine Beweise mit einer geheimnißvollen Dunkelheit umhüllet, und zwanzig Zwischensätze und Formeln, die ihme wohl, aber dem angehenden Lehrling nicht sogleich einfallen, in seinen enthymematischen Schlüssen ausläßt, auch was er sagt durch eine steganographische Zaubersprache, dazu man den Schlüssel erst mühsam suchen muß, noch undeutlicher macht, so möchte dem Lehrling der Hallerische Gedanke dabey einfallen:

— — Das will ich nicht verstehen,
Es müsse sich mein Feind mit solchen Büchern quälen!

Dem ungeachtet scheinen die meiste mathematische Handbücher unserer Zeiten, unter eine der angeführten drey Classen zu gehören. Denn entweder sind sie zu weitläuftig und allzugroß zum Lesen; oder sie sind zu mager und zu wenig demonstrirt; oder sie sind zwar demonstrirt, aber

so, daß man dabey sagen muß, was Keppler von des Apollonii Schriften sagte: Quis tolerat laborem perlegendi ista? Wenn also in gegenwärtigem Handbuch diese drey Fehler vermieden worden, so glaubt man, den übrigen in Menge vorhandenen mathematischen Schriften wenigstens keinen Abbruch mit dessen Ausgabe zu thun, weil es von ganz anderer Art, und weder zu groß, noch zu mager, noch, in seinen Demonstrationen, zu geheimnißvoll ist; neben deme darf man auch hoffen, daß dem verständigen Publico damit vielleicht mehr als mit andern gedient sey. Zu dem Ende muß man von dem Werk selbst folgendes sich bekannt machen.

Unter den mathematischen Compendien ist bekannter massen das Wolfische am meisten beliebt; es ist auch unter allen das beste, aber nur vor fünfzig Jahren, gewesen. Denn wenn einer es weiß, so weiß er, was man in der Mathematik zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts wußte; was inzwischen dazu gekommen, das bleibt ihm verborgen, wenn ers nicht aus andern Schriften lernt. Es bliebe ihm aber, ein wichtiger und bey nahe der schönste Theil der Ma-

thematik verborgen, wenn ihm die Erfindungen unsers Zeitalters verborgen blieben, die dem Wolfischen Handbuche bey seinen so häuffigen und immer neuen Auflagen doch nie einverleibt worden. Inzwischen hat das Wolfische Handbuch, ausser dem, daß es in vorigen Zeiten das beste war, noch jezo einen Vorzug, wodurch es sich immer erhält; und dieser besteht in seiner grosen Deutlichkeit. Man hat daher in gegenwärtiger Schrift sich, in Rücksicht auf die Deutlichkeit, nach diesem Handbuche gerichtet, und bey den Lehrsätzen, Satz und Beweis immer unterschieden, auch alle Zwischensätze nach der mathematischen Syllogistik angeführt, und also in beeden Theilen, die Lehren der neuen Mathematik, auch den Anfängern gleichsam vorbuchstabiret. Auf diese Weise, findet man nicht nur alles hier was die Hauptsachen betrifft, die in dem Wolfischen Handbuche stehen; sondern es ist noch ungleich mehr, nemlich dasjenige dazu eingetragen, was theils in gegenwärtigem Jahrhundert neu erfunden, theils in dem Euclideischen schon bekannt, und nachgehends in Vergessenheit gekommen war.

Die Beweise selbst, besonders die neuern, hat man mit aller Deutlichkeit so ausführlich hingesetzt, als ein Anfänger solche wünschen kann, und also dem Mangel abzuhelfen gesucht, darüber man bey verschiedenen gelehrten Compendien dißfalls klagt; der Nervensaft eines verständigen Menschen, ist doch ungleich kostbarer, als die Buchdruckerschwärze. Diese darf man eher versprützen, als jenen, wenn man nicht eben bloß für Gelehrte, sondern auch für Anfänger schreibt; doch hat man sich auch gehütet, daß man keine Ueberdeutlichkeit affectire, welche selbst in Folianten, und noch vielmehr in Compendien unangenehm läßt. Bey derjenigen Methode, die man also gebraucht, wird man, woferne noch einige Leser sich der Undeutlichkeit wegen beschweren sollten, den andern Hallerischen Ausdruck anführen können:

Sie sind gestraft genug, daß sie es nicht verstehn.

Soviel wollte man zum voraus von gegenwärtiger Ausgabe dieses Compendii melden. Der Verfasser davon, findet sein Vergnügen in zwo Wissenschaften, welche er vielleicht mit vielen andern Kennern für die wichtigsten in der

Welt

Welt hält; sie sind die Religion, und die Mathematik. Sein tragendes Amt ist neben her so beschaffen, daß er mit beeden sich immer bekannter machen muß. Da er also nicht nur nach seinem Vergnügen, sondern auch nach seinem Amt, an diesen beeden Wissenschaften arbeitet: so wird man sich um so weniger wundern, wenn er, wie bisher, in Rücksicht auf beede Wissenschaften, die Erkenntniß GOttes nach dem Gnadenreich so wohl als nach dem Naturreich, in seinen Schriften auszubreiten, und verehrungswürdig zu machen sucht. Schriebs, Stutgart den 2. April 1764.

Heinrich Wilhelm Clemm.

Vorrede

zur zweyten Ausgabe.

Es war mir zwar nicht ganz unvermuthet, daß es zu einer zweyten Auflage mit diesem Lehrbuch kommen dörfte; daß man sie aber so bald und kaum drey Jahr nach der ersten Ausgabe veranstalten müßte, das konnte ich nicht voraus sehen. Ich will es inzwischen eher als ein gutes Zeichen ansehen, daß das teutsche Publicum die mathematische Wissenschaften heut zu Tag besonders hochschätze, als daß ich wegen dem schnellen Abgange meines Lehrbuchs mir selbst einigen Ruhm beylegen sollte. Was die Verbesserungen betrifft, so habe, ungeachtet der Hr. Verleger eilte, doch verschiedene angebracht. Im ersten Theil ist ausser einigen Zugaben in der Buchstabenrechnung, die Lehre von den Parallelen deutlicher und genauer auseinander gesetzt, auch Cardans Regel nach den neuesten Wendungen vorgetragen. Im zweyten Theil sind neben einigen Zusätzen in der Statik,

die

die Flaschenzüge betreffend, und in der Astronomie, vornemlich die optische Wissenschaften in ein gröseres Licht gesetzt worden; wozu mir besonders unser gelehrte Herr Pfarrer Bischoff Anlaß gegeben hat. In der Form selbst habe nichts abzuändern für nöthig gefunden; eben so ist in der Geschichte der Wissenschaften nicht viel dazu gekommen; doch das wenige, das in drey Jahren bemerkt werden konnte, nicht vergessen. Ausser den bereits angeführten Verbesserungen und Zusätzen, findet man noch verschiedene andere z. E. I. Th. §. 14. §. 246. §. 458. besonders §. 573. §. 772. §. 827. §. 1049. und im II. Th. §. 80. §. 81. §. 565. §. 643. u. s. w. Den kurzen Anhang der Naturhistorie wünschte ich ganz umgearbeitet zu sehen, und da ich wenige Zeit dazu hatte, so wäre es mir sehr angenehm gewesen, wenn ein guter Freund, der dieser Arbeit gewachsen wäre, sich dem Geschäffte unterzogen hätte. Vielleicht geschieht es in Zukunft, daß dieser Anhang einzel und in einer ganz andern Gestalt erscheint. Gegenwärtig habe ich ihn fast unverändert gelassen, und theils nur die Naturgeschichte des Menschen aus dem Reccardischen Lehrbuch, theils hie und da einige Anmerkungen aus der neuen

Zur zweyten Ausgabe.

Ausgabe des Linnäischen Systems, mit Zuziehung einiger andern nützlichen Schriften hinzugethan, damit die Leser auch bey dieser Auflage den Anhang wenigstens nicht vermissen, und also eben dasjenige Ganze in seiner Art bekommen, das ihnen bey der ersten Ausgabe in die Hände geliefert wurde. Dis wird genug seyn zu einigem Unterricht, und auch zu meiner Entschuldigung. Mein gegenwärtiges Lehramt erlaubt mir vorhin keine andere als gleichsam verstohlne Blicke auf die Mathematik zu thun; und wenn ich nicht vorhin in Stuttgart noch zwey Jahre lang selbst über dieses Lehrbuch gelesen, und also mein eigenes damals gebrauchtes und revidirtes Exemplar in die Druckerey hätte geben können, so würde ich die Besorgung der Ausgabe nicht einmal haben übernehmen können; eben das gilt auch von meinen ersten Gründen der Mathematik, davon gleichfalls eine neue Auflage unter der Presse ist. Sollten in Zukunft mehrere Auflagen herauskommen, so hoffe ich daß der Herr Verleger allemal Sorge tragen wird, die nöthigste Verbesserungen nach den Umständen der Zeit, welche die Mathematik immer mit neuen Erfindungen bereichert, entweder durch

mich oder durch andere Herausgeber beysetzen zu lassen, widrigenfalls ich diesem Buch keine Dauer oder wiederholten Nachdruck wünschte. Ich werde aber selbst, wie schon gemeldt, wenn ich das Leben habe, einige Nebenstunden noch dazu finden, welche meinen theologischen Beschäftigungen keinen Eingriff thun werden; indem ich gleichwohl nicht der einige bin, sondern mich noch anderer Gelehrten erinnere, welche als blose Theologen mathematische Bücher heraus gegeben haben. Vielleicht ist es ein gutes Vorurtheil für die wahre Theologie, wenn man siehet, daß auch die schärfste Mathematik sich wohl mit ihr verträgt. Weiter habe ich hier nichts hinzuzusagen, als daß ich dem geneigten Andenken meiner Leser mich empfehle. Schriebs, Tübingen den 20. Merz 1768.

Heinrich Wilhelm Clemm,

der h. Schrift Doctor und offentlicher Professor der Theologie auf der Universität Tübingen, wie auch vierter Frühepredigter, Superintendent und Pastor der dasigen Gemeinde.

Inhalt

der

abgehandelten Materien.

Der arithmetischen Wissenschaften, erstes Haupt-
stück, von der Rechnung in Zahlen. Seite. 3
Allgemeine Erklärungen. 3
Geschichte der Zahlenrechnung. 4
Allgemeiner Vortrag von den vier Rechnungs-
arten. 7
Das Aussprechen und Schreiben der Zahlen. 11
Die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen. 14
Die Rechnung in Brüchen. 24
Von Decimal- und Sexagesimal-Brüchen. 32
Von den Potenzen. 36
Von Ausziehung der Quadratwurzel in Zahlen. 39
Von Ausziehung der Cubicwurzel in Zahlen. 43
Von den Verhältnißen in Zahlen. 47
Zweytes Hauptstück der arithmetischen Wissen-
schaften von der Buchstabenrechnung. 49
Die Geschichte der Buchstabenrechnung. 49
Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchstaben. 54
Die Buchstabenrechnung in Brüchen. 65
Von den Potenzen oder Dignitäten und ihren Ver-
änderungen. 68
* Die Irrationalwurzeln und eingebildete oder un-
mögliche Grösen. 80
Der binomische Lehrsatz. 80
* Die höchste Unterschiede oder Differenzen der

Die mit Asterisis bezeichneten Artikel können Anfänger übergehen.

Inhalt.

Potenzen und die Natur der geraden und ungeraden Zahlen. Seite 88
*Die Combinationen. 91
Von den Proportionen. 96
*Von den arithmetischen Proportionen und Reyhen. 97
Die geometrische Proportionen. 101
*Von den geometrischen Progressionen oder Reyhen. 108
Von den Logarithmen. 113
Von den Gleichungen. 118
*Von den quadratischen sowohl reinen als unreinen Gleichungen. 120
Von höhern Gleichungen überhaupt. 123
Von den Wurzeln der zusammengesetzten Gleichungen. 126
*Die Erfindung der Wurzeln und der Divisorum einer Gleichung. 128
*Die Veränderungen der Gleichungen. 131
*Die Bestimmung der Coefficienten bey Ausdrukkungen durch unendliche Reyhen. 133
Von unbestimmten Aufgaben. 137
Drittes Hauptstück der arithmetischen Wissenschaften, von der practischen Rechenkunst. 140
Geschichte der practischen Rechenkunst. 140
Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen. 145
Von der Regel Detri, sowohl directa als inversa, der zusammengesetzten Regel Detri oder Regel Quinque, Gesellschaftsrechnung, Kettenregel, u. s. w. 148
Von höhern Aufgaben der practischen Rechenkunst, und besonders auch vom Leibnizischen Interusurio, mit den Bilfingerischen Erläuterungen. 155
Der geometrischen Wissenschaften, erstes Hauptstück, von der gemeinen oder Elementar Geometrie. 171
Allgemeine Sätze von Linien, Winkeln und Figuren. 176
Die Verhältniß der Winkel gegen einander, nebst den daraus fliessenden Folgen. 188

Die

Inhalt.

Die Verwandlung der Figuren. Seite 200
Die Ausmessung geradelinigter Figuren. 210
Die Aehnlichkeit der Dreyecke und der Figuren überhaupt. 213
Von dem Cirkel, dessen Verwandlung und Ausmessung. 224
Die Lage der Linien gegen die ebene Flächen und der Flächen gegen einander. 239
Allgemeine Begriffe geometrischer Cörper, oder Einleitung in die Stereometrie. 246
Die Verwandlung der Cörper. 249
Die Ausmessung der Cörper. 253
Die Kugel oder Sphäre. 256
Die Kugelschnitte. 261
Zweytes Hauptstück, von der Trigonometrie. 265
Geschichte der Trigonometrie. 265
Erstes Capitel, von der ebenen Trigonometrie. 268
Allgemeine Begriffe von Sinus, Cosinus, Tangenten, Secanten und Cosecanten. 269
Allgemeine Theorie der trigonometrischen Rechnung. 279
*Die Erfindung der Sinus von den Summen und Differenzen der Bogen, aus den gegebenen Sinussen und andern trigonometrischen Linien. 287
Die Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreyecks, aus drey gegebenen Stücken, eine Seite mit darunter gerechnet. 294
*Anwendung der trigonometrischen Lehrsätze auf die Polygone. 299
Die Berechnung der Sinus und der Logarithme, nebst dem Gebrauch der Tafeln. 302
Zweytes Capitel, von der sphärischen Trigonometrie. 307
Allgemeine Betrachtung der sphärischen Dreyecke. 308
*Betrachtung und Auflösung der rechtwinklichten sphärischen Dreyecke. 310
*Betrachtung der Fälle, in welchen Winkel und Seiten gröser oder kleiner als 90 Grade werden. 314
*Betrachtung der schiefen Dreyecke. 317
*Betrachtung und Auflösung der schiefen Dreyecke,

in welchen drey Seiten oder drey Winkel gegeben sind. Seite 319
Drittes Hauptstück, von der practischen Geometrie. 328
Geschichte der practischen Geometrie. 329
Die Vergleichung der vornehmsten Maase. 331
Die Messung und Verjüngung der Linien und Figuren. 334
Die Messung und Verjüngung der Flächen, oder das Aufnehmen einer Gegend. 339
*Etwas von der Markscheidekunst. 340
Viertes Hauptstück, von der höhern Geometrie. 343
Geschichte der höhern Geometrie. 344
Allgemeine Begriffe von algebraischen und höhern Functionen. 350
Die algebraische Linien, besonders die Kegelschnitte, oder die Parabel, Ellipse und Hyperbel. 354
Die Parabel. 355
Die Ellipse. 357
Die Hyperbel. 362
Allgemeine Betrachtungen der conischen Sectionen und Linien der zweyten Ordnung. 369
*Von einigen andern, besonders auch transscendentischen Linien. 374
*Die geometrische Oerter und die Construction der Gleichungen. 377
Allgemeine Gründe der Differentialrechnung. 381
Die Anwendung der Differentialrechnung, auf die vier Rechnungsarten, in positiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen, auch Wurzeln, Potenzen und zusammengesetzten Grösen. 384
*Allgemeiner Beweis des Newtonischen Binomii und des Harriotischen Lehrsatzes. 389
*Allgemeine Betrachtung der höhern Differentialien, und die Verwandlung der Gleichungen durch eben diese Mittel. 393
*Nic. Bernoulli Methode, alle mögliche Reyhen, durch die sich eine Gleichung auflösen läßt, und die Gestalt der Reyhen, zu finden. 400

Die

Inhalt.

* Die Methode vom Kleinsten und Grösten (Methodus de maximis & minimis.) Seite 403

Von den Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien. 406

Allgemeine Regeln der Integralrechnung auch in Rucksicht auf die Wiederherstellung der beständigen Grösen. 410

* Einige schwerere Integralformeln für zusammengesetzte Differentialien. 412

Von der Quadratur der krummen Linien. 417

* Die Rectification der krummen Linien, besonders auch der Neilischen Parabel. 420

* Newtons und Leibnizens Methoden, den Cirkel zu quadriren und zu rectificiren, nebst Diff. Formeln für den Cirkel. 424

Die umgekehrte Methode der Tangenten. (Methodus Tangentium inversa.) 427

* Die logarithmische Differentialien, und der Unterschied der natürlichen oder hyperbolischen, und der künstlichen Logarithmen. 428

* Die Exponentialrechnung nebst einigen Integralformeln für logarithmische Differentialien. 432

* Johann Bernoulli Vergleichung der Ausschnitte des Cirkels und der Hyperbel. 434

* Einige andere Vergleichungen der Sinus, Cosinus, Tangenten, nach Johann Bernoulli Methode. 439

* Herrn Eulers und Clairaut Betrachtungen über die Differentiale der Functionen, die zwo und mehr veränderliche Grösen enthalten. 442

Inhalt.

**Die Lehre von der Evolution, Evoluten, und aus Evolution erzeugten Linien, den Krümmungscirkeln und Radiis, (circulis curvaturæ, radiis oſculi.) Seite 447

Zweyter Theil.

Der ſtatiſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtück, von der Statik ſonſt Mechanik. 3

Geſchichte der Statik. 4

Allgemeine Begriffe von den in der Statik vorkommenden Wörtern der Kraft, Laſt, Schwere, Direction u. ſ. w. 7

Allgemeine Theorie des Hebels, (Theoria vectis.) 10

Allgemeine Theorie der Zuſammenſetzung der Kräfte, nebſt dem Varignoniſchen Beweiſe vom Hebel. 13

Anwendung der Lehre vom Hebel auf die Erfindung des Schwerpunkts, der Gewichter, der Zeiten, u. ſ. w. ferner die Waagen und Schnellwaage. 18

Das Rad (Axis in Peritrochio.) 23

Die Rolle, oder Kloben (Trochlea). 27

Allgemeine Theorie der ſchiefen Fläche, (Planum inclinatum). 30

Die Schraube und der Keil. (Cochlea & cuneus.) 33

Das Waſſerwägen (Nivelliren). 36

Die Waſſer- und Windmühlen. 39

*Von den Uhrwerken vornehmlich Penduluhren und den dazu nöthigen mechaniſchen Lehrſätzen, ferner von den Hinderniſſen der Maſchinen, wie auch vom Geſeze der kleinſten Wirkung. 43

Inhalt.

Zweytes Hauptstück, von der Hydrostatik. Seite 52

Die Geschichte der Hydrostatik. 52

Allgemeine Begriffe und Säze vom Druck der flüssigen Cörper. 53

Das Gleichgewicht der flüssigen Materien untereinander. 57

Das Gleichgewicht flüssiger und vester Cörper. 60

Die Archimedeische Gold- und Silberprobe, oder die Probe zweyer vermischten Metalle. 63

* Etwas von dem Mathematischen bey dem Münzwesen. 65

Das Schwimmen der Cörper besonders in Rücksicht auf das Schiffwesen. 68

Drittes Hauptstück, von der Aerometrie. 72

Die Geschichte der Aerometrie. 72

Die Existenz der Luft, ihre Schwere und Elasticität. 75

Die angenehme Eigenschaften der Luft, nebst ihren Folgen und zwar erstlich die Akustik. 78

* Die Musik oder das Mathematische bey der Musik. 82

Die Luftpumpen und die durch die Luftpumpe gemachte weitere Entdeckungen. 90

Vom Druck der Atmosphäre auf die Erde und von dem Torricellischen Vacuo. 93

Die Luftmesser oder das Barometer, Ther-

mo-

Inhalt.

mometer, Hygrometer und Manometer, auch Anemometer oder Windmesser. Seite. 96

Viertes Hauptstück, von der Hydraulik. 102
Die Geschichte der Hydraulik. 102
Die Bewegung des Wassers durch Pumpen, Druckwerk und andere Maschinen. 104
Die Bewegung des Wassers durch Luft und die verschiedene Gattungen der Heber, besonders auch der Würtembergische. 107
Die Springbrunnen und Wasserspritzen. 110

Der optischen Wissenschaften erstes Hauptstück von der Optik besonders. 117
Die Geschichte der Optik besonders. 118
Die Ausbreitung der Stärke des Lichts in verschiedenen Entfernungen. 120
Betrachtung des Schattens, besonders wenn eine dunkle Kugel von einer hellen erleuchtet wird. 122
Kurze Beschreibung des Auges. 125
Betrachtung der Erscheinungen entfernter Körper nach ihrer Gröse und Bewegung. 126
Die Farben. 130

Zweytes Hauptstück, von der Catoptrik. 132
Die Geschichte der Catoptrik. 132
Allgemeines Gesetz der reflectirten Strahlen. 135
Von den ebenen Spiegeln. 136

Von den sphärischen, paraboliſchen und andern Spiegeln. 139

Drittes Hauptstück, von der Dioptrik. 145

Geschichte der Dioptrik. 145

Allgemeines Gesetz der Refraction. 149

Die dioptrische Gläser und die Erfindung der Brennweite durch Zeichnung. 152

Die Erfindung der Brennweiten durch Rechnung. 155
Von den Fernröhren oder Telescopiis, nemlich

Inhalt.

lich den astronomischen, den Erdröhren, (Tubis terrestribus) den Newtonischen und Gregorianischen Telescopiis, wie auch dem Polemoscop. Seite 163

Von den Vergröserungsgläsern, Kleinigkeiten in der Nähe zu sehen, oder von den Microscopiis sowohl einfachen als zusammengesetzten, auch von den Brillen. 167

Von einigen andern dioptrischen Instrumenten. 173

Viertes Hauptstück, von der Perspectiv. 176

Geschichte der Perspectiv. 177

* Allgemeine Theorie der Perspectiv und ihre Fundamentalgesetze. 178

Von dem Schatten. 183

Etwas von dem Practischen in der Perspectiv. 184

Der astronomischen Wissenschaften erstes Hauptstück, von der Astronomie. 189

Geschichte der Astronomie. 190

Erstes Capitel, von der sphärischen Astronomie. 196

Die Kenntniß der Fixsterne, nach ihrer Lage und Sternbildern. 197

Die Kenntniß der Planeten nach ihrer Lage und Bewegung. 200

Die Kenntniß der vornehmsten Cirkel am Himmel und die darauf beruhende sphärische Rechnungen der Höhen, Abweichung, Längen, Breiten, Ascension, Descension. 204

Die Bewegung der Sonne besonders, und die

Inhalt.

dadurch entstehende Tage und Jahre, wie auch die Zeitgleichung, (æquatio temporis.) Seite 211

*Die Vorrückung der Nachtgleichen, (Præcessio æquinoctiorum,) nebst ihrer Ursache. 216

*Die Parallaxe. 218

Die Refraction. 223

Zweytes Capitel, von der theorischen Astronomie. 225

Die Copernicanische Theorie vom Sonnen- und Planeten-System. 226

*Die Kepplerische Theorie von den zwey Hauptgesetzen der Bewegung der himmlischen Cörper. 230

*Die Bradleyische Theorie von der Aberration der Fixsterne. 240

*Die Newtonische Mondstheorie. 244

Einige Folgen aus den bisherigen Theorien, besonders auch in Rucksicht auf den Mond, und die durch ihn entstehenden Finsternisse. 252

*Die Theorie oder Methode der Interpolationen. 258

Etwas von der Cometen-Theorie. 265

Etwas von dem Practischen in der Astronomie. 267

Zweytes Hauptstück, von der Geographie. 273

Geschichte der mathematischen Geographie. 273

Die wahre Gestalt der Erde. 275

Die Unterschiede der Mittagscirkel in Zeit und Graden. 278

Von

Inhalt.

Von der Breite und Länge der Oerter. Seite 280

Die Correction der Differenzen der Mittagscirkel durch Beobachtung der Finsternissen. 282

Die Berechnung der Grade in Parallelkreisen, und die verschiedenen Zonen, nebst einigen andern geographischen Rechnungen. 283

Die Loxodromie oder etwas von der Schifahrt. 286

Drittes Hauptstück, von der Chronologie. 289

Geschichte der Chronologie. 289

Von den Tagen, Wochen, Monaten und Jahren. 290

Von den Cyclis. 292

Von der Reduction verschiedener Jahrzahlen. 297

Von dem Calender und der Festrechnung. 300

Viertes Hauptstück, von der Gnomonik. 303

Geschichte der Gnomonik. 303

Die Sonnenuhren überhaupt, besonders die Aequinoctial- und Horizontaluhren, welche das Fundament der übrigen sind. 304

Die Monds- und Sternenuhren. 306

*Allgemeine Theorie der Verticaluhren. 308

Der architectonischen Wissenschaften

Erstes Hauptstück, von der Civilbaukunst. 315

Geschichte der Civilbaukunst. 315

Allgemeine Regeln der Baukunst nebst den Folgen daraus. 317

Die

Inhalt.

Die Theorie der Säulenordnungen. Seite 323

Allgemeine Theorie von den Säulenweiten, Ordnung der Balkenköpfe, Triglyphen und ihren Zwischenweiten. 325

Vom guten Geschmack in der Baukunst, und von den Eigenschaften eines guten Baumeisters. 332

Zweytes Hauptstück, von der Militairbaukunst. 337

Geschichte der Militairbaukunst. 337

Allgemeine Regeln der Fortification und die Namen der Haupttheile. 339

Die verschiedene Bevestigungssysteme, besonders die Baubanische und Bilfingerische. 343

Von der irregulairen Bevestigung. 349

Etwas von der Artillerie. 350

Die
arithmetische
Wissenschaften,
oder
die Rechnung in Zahlen, die Buchstabenrechnung, und die praktische Rechenkunst.

Der arithmetischen Wissenschaften

Erstes Hauptstück,

von der Rechnung in Zahlen.

Allgemeine Erklärungen.

Die Grösse, das ist, was vermindert oder vermehret werden kann, läßt sich von den übrigen Eigenschaften einer Sache als abgesondert betrachten; eine abgesondert betrachtete Grösse ist der Gegenstand der Mathematik; sie ist also möglich, und beschäfftigt sich mit möglichen Dingen.

§. 2. Die Grösse kann man entweder als eine Menge von Theilen überhaupt ansehen, oder man kann die Verbindung und Ordnung ihrer Theile zugleich betrachten: in jenem Fall gehört sie in die Arithmetik, in diesem aber in die Geometrie. Folglich gibt es nicht weiter mathematische Wissenschaf-

ten als diese zwo, worunter sich alle übrige bringen lassen. Wenn man aber ihre Lehren auf die wirkliche Sachen anwendet, so wird man so viel Theile der angewandten Mathematik erfinden können, als verschiedene Gattungen von Dingen in der Welt sind. Ihre Anzahl läßt sich also nicht bestimmen, und erfindsame Köpfe werden sie noch immer mit neuen Disciplinen bereichern können.

§. 3. Die Arithmetik beschäfftigt sich mit der Gröse, in sofern sie als ein Ganzes betrachtet wird, das aus Theilen bestehet, die sich vermindern und vermehren, und allesamt zugleich genommen, für das Ganze, einzeln aber für einander setzen lassen, ohne daß man auf die Verbindung und Ordnung dieser Theile, wie in der Geometrie, zu sehen nöthig hätte. Die Möglichkeit dieser Erklärung erhellt aus §. 1. sie hat also ihre Richtigkeit.

§. 4. Die Rechenkunst in Zahlen ist von der Arithmetik überhaupt nur darinnen unterschieden, daß die Gröse durch die unter uns gewöhnliche Zahlzeichen ausgedruckt werden; wovon wir in der folgenden kurzen Geschichte der Rechenkunst was sagen werden.

Geschichte der Zahlenrechnung.

§. 5. Das Rechnen war den Alten ungleich beschwerlicher, als es heutzutag ist. Man bediente sich des Alphabeths, dessen erster Buchstabe eins, der andere zwey u. s. w. beditten hatte, wie man aus den hebräischen und griechischen Grammatiken es weiß. Die Lateiner machten aus ihrem Alphabeth

eine

eine Auswahl, und nahmen nur die Buchstaben I, V, X, L, C, D, M, zu ihren Zahlzeichen. Einige wollen zwar das M nicht darunter zehlen.

§. 6. So beschwerlich nun diese Rechnung war, so hat doch vor schon zwey tausend Jahren Euclides die Eigenschaften der Zahlen oder die Theorie der Arithmetik in seinem siebenten, achten und neunten Element auf eine so demonstrative Weise vorgetragen, daß man den grosen Geist der Alten, die uns vorgearbeitet haben, darinnen bewundern muß.

§. 7. Anmerk. In verschiedenen neuern Ausgaben des Euclides sind zwar diese drey Elemente weggelassen: es ist aber wo nicht ein Fehler, doch eine unzeitige Herablassung gegen die Anfänger, für welche man selbige zu schwer hielte; dahero die meiste Commentatoren nur über die sechs ersten Elemente geschrieben haben. Andreas Tacquet hat sich um die mathematische Wissenschaften besser verdient gemacht, da er diese drey Elemente in seine theoriam & praxin Arithmetices völlig eingerückt und erläutert hat. Wenn Anfänger gründlich geführt werden, so müssen sie von dem, was schwer scheinet, nicht zurückgehalten werden, oder lieber die Sache gar nicht lernen; es ist allemal besser, etwas langsam aber recht, als geschwind aber schlecht lernen. Euclides und Archimedes wollten selbst den königlichen Prinzen keinen andern Weg zur Wahrheit bahnen: aber eben darum wurden ihre Schüler so vollkommen gebildet. Die neuere bilden durch ihr Nachgeben zwar viele, aber sehr mittelmäßige Mathematiker, wenn anders dieser Name nicht zu gut für sie ist.

§. 8. Anmerk. Ausser dem Euclides hat sich unter den Alten keiner gleich verdient um die Arithmetik gemacht. Nicomachus schrieb drey hundert Jahre vor Christi Geburt zwey Bücher der Arithmetik, welche im sechsten Jahrhundert nach Christi Geburt Anic. Manl. Severinus Boethius in seiner Arithmetik grösstentheils abgeschrieben hat: es sind aber nichts, als Eintheilungen der Zahlen; und was man daraus lernen kann, ist höchstens dieses, daß man von den logicalischen Definitionen und Divisionen etwa einen Begriff bekommt. Von dem Pfellus, einem griechischen Schriftsteller des zehenten Jahrhunderts, dessen Arithmetik Wilhelm Xylander ins Lateinische 1556. übersezt und erläutert hat, müssen wir ein gleiches sagen.

§. 9. Seitdeme die sogenannte arabische Zahlzeichen, die heutzutag üblich sind, in Europa bekannt wurden, hat die Rechenkunst eine andere Gestalt bekommen. Dann es ist mit den Zahlzeichen, die wir haben, ungleich leichter zu rechnen, als mit den griechischen Buchstaben.

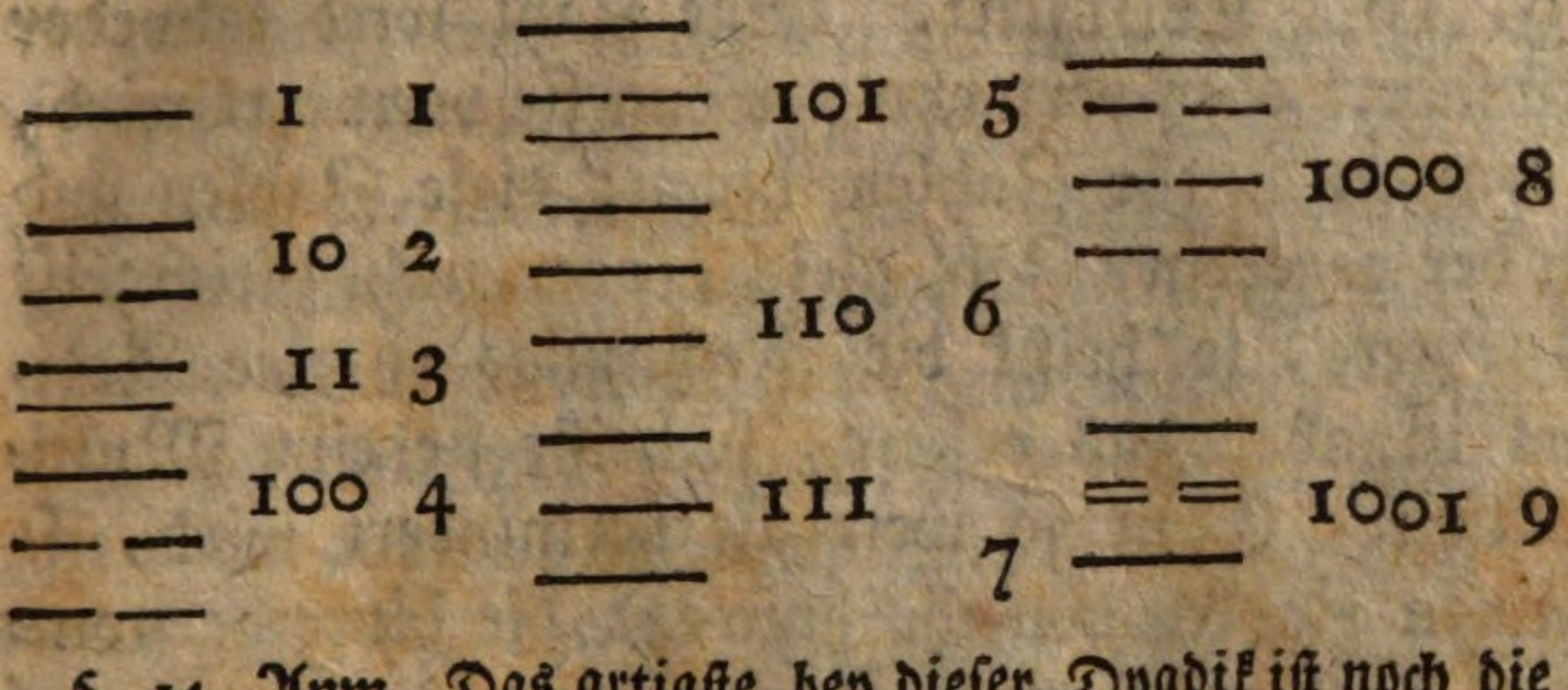
§. 10. Die Erfindung dieser Zahlzeichen schreibt man insgemein den Arabern oder überhaupt den Morgenländern zu, und es ist auch sehr wahrscheinlich, daß sie von ihnen herkommen, weil die Europäer sonst alles von der Rechten zur Linken schreiben, bey den Zahlen aber allein eine Ausnahme machen, welche einen orientalischen Urspruug verräth. Die eigentliche Zeit der Erfindung selbst läßt sich nicht genau bestimmen.

§. 11. Der allgemeine Nutzen dieser Erfindung ist so groß, daß sie sich von keiner andern Erfindung zu rechnen bisher hat verdrängen lassen, und auch vielleicht in Zukunft nicht wird verdrungen werden. Denn man kann mit wenig Zahlzeichen eine so grose Summe schreiben als man verlangt; und die Art der Verbindung, die wir im II. Hauptstück erklären, ist so bequem und künstlich, daß man schwerlich eine bessere wird ausfindig machen können.

§. 12. Anmerk. Herr von Leibniz hat, ausser der Rechenmaschine, die bey unserer Rechnung mit Zahlen entbehrlich ist, eine eben so entbehrliche Dyadik erfunden, welche aus 1 und 0 alle Zahlen zusammen sezt, andere haben eine noch mehr entbehrliche Tetractyk hinzugethan, die nur bis vier zehlet, anstatt daß unsere Rechnung bis zehen zehlt. Die Leibnizianische Dyadik hat den einigen Vorzug, daß man multipliciren und dividiren kann, ohne das manchen beschwerliche Einmal Eins zu lernen; hingegen muß man eine grose Zahl zu schreiben, z. E. nur eine Million, vier hundertmal 1 und 0 auf das Papier schreiben, durch welches langweilige Geschäffte man billig abgeschröckt wird, eine so bequeme Rechnung, die nur sieben Zahlzeichen zu einer Million gebraucht,

gebraucht, mit einer so weitläuftigen zu verwechseln, wenn man auch schon das Einmal Eins dabey nicht lernen darf.

§. 13. Anmerk. Uebrigens hat Herr von Leibnitz durch seine Dyadik auch einige chinesische Characteres zu erläutern gesucht, in welchen gebrochene und ganze Linien vorkamen; und wovon folgende Ordnung zur Erläuterung dient.



§. 14. Anm. Das artigste bey dieser Dyadik ist noch die Anwendung auf die Schöpfung aus Nichts, welche Leibnitz auf einer Gedächtnißmünze, worauf etliche Rechnungsproben nach der Dyadik geprägt waren, mit folgender Innschrift erläutert hat:

Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum.

Soll ich übrigens von den neuesten Rechenbüchern, die in Menge vorhanden sind, noch etwas sagen, so verdient **Ludwig Wenzen** demonstrativische Einleitung zur Rechenkunst unter allen den Vorzug.

Allgemeiner Vortrag von den vier Rechnungsarten.

§. 15. **Erklärungen.** Solche Dinge, welche man in Rücksicht blos auf das, was sie miteinander gemein haben, betrachtet, und in sofern für einerley halten kann, sind Dinge von einerley Art; z. E. ein Engländer, ein Däne und ein Deutscher haben das miteinander gemein, daß sie Europäer seyen;

und in sofern kann ich sie zusammen zehlen: dann es sind weder drey Engländer, noch drey Dänen, noch drey Deutsche, aber drey Europäer sind es. Und dieser gemeinschaftliche Character heißt die **Einheit**; eine Menge von solchen Einheiten aber eine **Zahl**.

§. 16. **Lehrsatz.** Eine Zahl wird entweder vermindert oder vermehrt: wenn sie vermehrt wird, so kommen mehr Zahlen hinzu; diese Zahlen sind nun der gegebenen Zahl gleich, oder nicht gleich; ist das letztere, so heißt die Rechnungsart eine Addition; ist aber das erstere, so heißt sie eine Multiplication. Eben so wenn sie vermindert wird, so kommen Zahlen von ihr hinweg: die hinweggenommene Zahl wird nun überhaupt entweder einmal weggenommen, oder sie wird so oft hinweggenommen, als es möglich ist; ist jenes, so heißt die Rechnungsart die Subtraction; ist dieses, so heißt sie Division.

§. 17. **Erklärungen.** **Addiren** heißt also eine Zahl finden, die verschiedenen andern gegebenen Zahlen zusammen genommen gleich ist; diese gefundene Zahl wird die **Summe** genannt, die gegebene heissen die **summirenden**. **Multipliciren** heißt eine Zahl etlichmal zu sich selbst addiren; was durch diese Addition herauskommt, nennt man das **Product**; und die beede Zahlen, davon die eine zu wiederholten malen wirklich addirt wird, die andere aber anzeigt, wie oft die erste zu sich selbst addirt werden solle, heissen die **Factores**.

§. 18. **Zusatz.** Der eine Factor ist demnach in dem Product so vielmal enthalten, als die Einheit in dem andern Factor enthalten ist; und es ist

gleich=

gleichgültig, welcher Factor zuerst gesezt wird, dann ihr Product wird auch bey veränderter Ordnung immer einerley seyn.

§. 19. **Erklärungen.** **Subtrahiren** heißt von einer gegebenen Zahl eine andere nach Belieben wegnehmen; was übrig bleibt, nennt man die **Differenz**, oder den **Unterschied**. Dahero die Differenz und die subtrahirte Zahl (Subtrahendus) zusammengenommen, der ersten Zahl gleich sind, von welcher man subtrahirt hat (item numero minuendo). **Dividiren** hingegen heißt eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen Zahl so oft abziehen, als es möglich ist, das ist, bis nichts mehr übrig bleibt, oder die übergebliebene Gröse so klein wird, daß sie für nichts zu achten ist. Die Zahl, welche dividirt wird, heißt der **Dividendus**; die Zahl, womit man dividirt, der **Divisor**; und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der **Divisor** sich vom Dividendus habe abziehen lassen, der **Quotient**.

§. 20. **Zusatz.** Der Divisor muß also in dem Dividendus so oft enthalten seyn, als die Einheit im Quotienten; oder, wenn der Divisor gröser ist, so ist der Dividendus im Divisor so vielmal enthalten, als der Quotient in der Einheit.

§. 21. **Zusatz.** Das Product des Divisors in den Quotienten gibt den Dividendus; und das Product durch einen Factor dividirt, gibt den andern Factor.

§. 22. **Erklärungen.** Gleiche Dinge sind, welche einerley Gröse haben; ähnliche Dinge, bey welchen alles einerley ist, ausgenommen die Gröse; gleiche und ähnliche Dinge heißt man **Congruent**.

§. 23. **Grundsätze.** Das Ganze ist seinen Theilen zusammen genommen gleich, folglich gröser als ein jeder einzeler Theil. Jede Gröse ist sich selbst gleich. Die folgende wollen wir besonders auszeichnen. I. Wenn zwo Gröse einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich. II. Was aber gröser oder kleiner ist, als eine von zwo gleichen Gröse, das ist auch gröser oder kleiner als die andere. III. Gleiches zu gleichem addirt, oder von gleichem subtrahirt, oder mit gleichem multiplicirt und dividirt, gibt gleiche Summen, Differenzen, Producte und Quotienten; sie werden aber ungleich, wenn man ungleiches addirt, oder subtrahirt, oder damit multiplicirt und dividirt. IV. Das Gröseres zum Gleichen addirt oder damit multiplicirt, gibt mehr als das Kleinere, weniger aber, wenn man es subtrahirt oder damit dividirt.

§. 24. **Willkührliche Sätze.** Die Zeichen der arithmetischen Operationen sind folgende:

+	Zeich. der Addition;	=	Zeich. der Gleichheit;	∞	Zeich. des unendlich Grosen;
—	der Subtraction;	∽	der Aehnlichkeit;	o	was keine Gröse hat, oder unendlich klein ist;
.	der Multiplication;	≡	der Congruenz;		
:	der Division;	<	dessen was gröser ist;	√	das Wurzelzeichen.
		>	dessen was kleiner ist;		

§. 25. Anmerk. Damit die obige Grundsätze, welche in alle mathematische Wissenschaften ihren beständigen Einfluß haben, als allgemeine, leichte und jedermann faßliche Sätze desto besser erkannt werden: so wollen wir sie mit Exempeln erläutern, die den Gebrauch der Zeichen zugleich bestimmen können.

Exempel zu Nr. I. §. 23.

$5 + 10 = 15$
$12 + 3 = 15$
$12 + 3 = 5 + 10$

Nr. II. $5 + 10 = 15$
$20 > 15$
$20 > 5 + 10$

Nr. III. $6 = 4 + 2$ $6 = 4 + 2$ $6 = 4 + 2$ $6 = 4 + 2$
$3 = 3$ $3 = 3$ $3 = 3$ $3 = 3$
$6 + 3 = 4 + 2 + 3$; $3.6 = 3.(4 + 2)$; $6 - 3 = (4 + 2) - 3$; $6 : 3 = (4 + 2) : 3$.

Nr. IV. $10 = 8 + 2$ $10 = 8 + 2$ $10 = 8 + 2$ $10 = 8 + 2$
$5 > 3$ $5 > 3$ $5 > 3$ $5 > 3$
$10 + 5 > 8 + 2 + 3$; $5.10 > 3.(8 + 2)$; $10 - 5 < (8 + 2) - 3$; $10 : 5 < (8 + 2) : 3$

Durch diese Exempel werden alle gegebene Grundsätze erläutert, und von dem Geheimnißvollen, das sie an sich zu haben scheinen, befreyet seyn. Was die Zeichen betrift, so merken wir noch an, daß eine zusammengesetzte Gröse, wenn sie durch eine andere dividirt oder multiplicirt wird u. s. w. oder wenn beede zusammengesetzt sind, in () eingeschlossen werden; z. E. $(5 + 7) . (3 + 5)$ oder $(9 + 2) : (4 — 1)$; bey der Multiplication kann das Zeichen auch in diesem Fall wegbleiben, z. E. $(4 + 1)(5 + 9)$, wie es bey der Multiplication der Buchstaben allemal wegbleibt, z. Ex. $a . b = ab$; wie weiter unten gezeigt werden solle. Sonsten ist auch das sogenannte Andreas-Creuz das Zeichen der Multiplication; z. E. $5 \times 10 = 50$. Die Division zeigt man auch durch einen Querstrich zwischen dem Dividendus und Divisor an. z. E. $\frac{3}{5}$, $\frac{(6+4)}{(3+2)}$. Von den Wurzeln und Potenzen reden wir im folgenden; vorläufig setzen wir doch einen Ausdruck statt eines Exempels bey. Dann weil $6 . 6 = 36$, so heißt 6 die Quadratwurzel aus 36, und wird geschrieben $\sqrt{36}$, oder $6 = \sqrt{36}$; und diese Wurzel ist allemal die Quadratwurzel, wenn nichts in der Oeffnung des Zeichens stehet. Soll es aber eine andere Wurzel seyn, so muß man es in die Oeffnung hineinschreiben, die wievielte man verlange, z. E. $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{64}$, oder überhaupt $\sqrt[n]{100}$, die *n*te Wurzel aus hundert.

Das

Das Aussprechen und Schreiben der Zahlen.

§. 26. **Willkührl. Satz.** Man zehlet von eins bis zehen, so daß man den neun ersten Einheiten besondere Zeichen gibt, die Zahl zehen aber durch die Verbindung von 1 und 0 ausdrücket. Daß dieser Satz willkührlich sey, erhellet daher, weil man nicht genöthigt ist, mit einfachen Zeichen gerade so weit zu zehlen; man könnte eher noch aufhören, etwa schon bey zwey, wie die Leibnizianische Dyadik es weiset. Inzwischen hat diese übliche Rechnungsart ihre grose Vortheile, davon wir §. 9. etwas gesagt. Die dabey übliche bekannte Zeichen sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und die 0, welche durch Verbindung mit 1 zehen, mit 2 zwanzig u. s. w. nemlich allemal zehnmal so viel als die einfache Zahl gibt.

§. 27. **Anmerk.** Man hätte statt der 0 auch ein anderes Zeichen, z. E. ein Sternlein * oder so was gebrauchen können; dann das Zeichen der 0 ist hier keine Nulle, wie man sonst die Nullen nimmt, sondern eine blose Anzeige, daß die Einheit um eine Stelle weiter vor sich gerückt worden sey.

§. 28. **Lehnsatz.** Neun Zeichen lassen sich nicht weiter als neunmal neun, oder 81 mal setzen und combiniren, wenn je zwey und zwey combinirt werden; wie in der Lehre der Combinationen gezeigt werden solle; folglich kann man mit den gewöhnlichen 9 Zahlzeichen Hundert nicht anders schreiben, als durch eine dreyfache Verbindung; denn 81 mal werden die neun Einheiten miteinander, neunmal mit der 0 combinirt, das gibt neunzig; dazu kommen noch die neun einzele Einheiten; das macht 99; folglich muß bey der Zahl Hundert die dreyfache Combination anfangen.

§. 29.

§. 29. **Zusatz.** Eben so kann man beweisen, daß bey tausend die vierfache, bey zehentausend die fünffache Combination u. s. w. anfangen muß.

§. 30. **Willkührl. Satz.** Die neun einfache Zahlzeichen haben ihre eigene Namen. Das erste zusammengesezte Zahlzeichen, nemlich 10, hat ebenfalls einen besondern Namen, und heißt zehen; die folgende bekommen ihre Benennungen aus den Namen der einfachen, und ersten zusammengesetzten Zahl; z. E. siebenzehen, achtzehen, dreysig, vierzig u. s. w. zehenmal zehen wird hundert genannt; zehenmal hundert heißt tausend, u. s. w. Endlich um aller Verwirrung bey den zu oft wiederholten Tönen vorzubeugen, nennt man tausendmal tausend eine Million, millionmal million eine Billion, millionmal billion eine Trillion u. s. w.

§. 31. **Willkührl. Sätze.** In der ersten Stelle zur Rechten stehen die Einheiten, in der zweyten gegen die Linke die Zehner, in der dritten die Hunderter, in der vierten die Tausender u. s. w. Die Nullen dienen, die leeren Plätze auszufüllen, wenn z. E. kein Zehner, kein Hunderter, aber ein Tausender u. s. w. vorhanden ist. Es wird dahero leicht seyn, eine Zahl auszusprechen, wenn man sie hinter sich liesst, oder will man sie von vornen lesen, so muß man, wofern die Zahl groß ist, weil man nicht leicht über 3 oder 6 Zahlen auf einmal schnell überschauen kann, von 3 zu 3, oder wenigstens von 6 zu 6 Zeichen machen, welches Strichlein oder Punkten seyn können, wodurch man die Classen und den Wehrt der Zahlen, das ist, die Stellen der Tausender und der Millionen anzeigt.

§. 32.

§. 32. Anmerk. Nun wird sich eine jede Zahl leicht aussprechen lassen. Z. E. 4'568.423 sind, wenn man hinter sich liest, 3 Einheiten, 2 Zehner, 4 Hunderter, 8 Tausender, 6 Zehntausender, 5 Hunderttausender, 4 Tausendmaltausender, oder 4 Millionen; von vornen aber, durch Hülfe der Strichlein, wo die Tausender und Millionen anfangen; 4 Millionen, Fünfhundert und Acht und Sechzig Tausend, Vierhundert und Drey und Zwanzig. Eben so läßt sich eine Zahl mit Nullen vermengt aussprechen. Z. E. 302'004,603 sind 3 Einheiten, kein Zehner 6 Hunderter, 4 Tausender, kein Zehentausender, kein Hunderttausender, 2 Millionen, kein Zehner von Millionen, 3 Hunderter von Millionen; wenn man hinter sich liest: von vornen aber, durch Hülfe der Strichlein, Dreyhundert und zwo Millionen, Viertausend Sechshundert und Drey.

§. 33. Anmerk. Die deutsche Sprache hat etwas besonders und dabey sehr unschickliches vor den meisten andern Sprachen, daß sie gemeiniglich die kleinere Zahl vor der grösern im Aussprechen setzt, und z. E. drey und zwanzig statt zwanzig drey, fünf und neunzig statt neunzig fünf u. s. w. sagt. Man ist es aber einmal so gewohnt, und muß also der dabey zu besorgenden Verwirrung durch desto grösere Aufmerksamkeit zu begegnen suchen. Doch gibt es auch Gelehrte, welche die natürliche Ordnung der eingewurzelten Gewohnheit vorziehen, und schlechterdings, fünfzig vier, sechzig drey, statt vier und fünfzig und drey und sechzig, aussprechen. In Rechnungen mit genannten Zahlen, in Capitalbriefen und Schuldverschreibungen findet man diese letztere Art sich auszudrucken nicht selten, wenn man nemlich die Zahlen ganz ausschreibet, und nicht nur mit den sogenannten arabischen Zahlzeichen anzeigt.

Die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 34. Lehrsatz. Verschiedene Zahlen werden addirt, wenn man von der Rechten zur Linken die Zahlen so untereinander schreibt, daß Einheiten unter die Einheiten, Zehner unter die Zehner, Hunderter unter die Hunderter u. s. w. zu stehen kommen, worauf man jede Reyhe, nemlich die Reyhe der Einheiten, der Zehner, der Hunderter u. s. w. zusammen zehlt, und hernach entweder die einzele

Sum-

Summen wieder addirt; oder wenn man eine Fertigkeit im Zusammenzehlen besitzt, sie gleich bey dem ersten Addiren so zusammen zehlt, daß Einheiten, Zehner, Hunderter ihre rechte Stelle bekommen, wenn sie etwa für eine der folgenden Reyhe im Sinn aufbehalten werden müßten. Wenn man nun keinen Fehler begeht, so wird die Summe den gegebenen Zahlen vollkommen gleich seyn, weil das Ganze seinen Theilen zusammen genommen gleich ist.

§. 35. Anmerk. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern. Es seyen folgende Zahlen gegeben. So sagt man:

```
678345
  5321
  4894
------
    10
    15
    14
    17
    67
------
688560
```

4 und 1 und 5 geben 10; die man hinter den Strich sezt; wiederum 9 und 2 und 4 geben 15 (Zehner); die man unter den Zehner von der Rechten zur Linken schreibt; ferner 8 und 3 und 3 geben 14 (Hunderter), in ihre Reyhe gesetzt; 4 und 5 und 8 geben 17 (Tausender); und noch 67 Zehentausender sind 67 Zehentausender; diese Partial-Summen addirt man wiederum, und sagt, 0 ist 0, 5 und 1 ist 6, 4 und 1 ist 5, 7 und 1 ist 8, 7 und 1 ist 8, 6 ist 6; da dann die untere Zahl heraus kommt. Wenn aber diese Methode zu langweilig scheint, wie sie es in der That ist, so muß man nur so viel Fertigkeit bekommen, daß man im Stand ist, Zahlen im Kopf zu behalten; da dann das Exempel also gemacht wird: 4 und 1 und 5 geben 10, setze 0 behalt 1, (einen Zehner in die folgende Classe) 9 und 2 und 4 geben 15 und 1 behalten geben 16, setze 6 behalte 1, (einen Hunderter in die folgende Classe;) 8 und 3 und 3 geben 14 und 1 behalten geben 15 Hunderter; setze 5 behalte 1 (einen Tausender in die folgende Classe;) 4 und 5 und 8 geben 17 und 1 behalten, geben 18; setze 8, behalte 1, (einen Zehentausender in die folgende Classe;) 7 und 1 behalten geben 8 Zehentausender; setze 8; 6 (Hunderttausender) sind 6 (Hunderttausender) setze 6. In diesem Fall wird die obige Summe schneller und eben so richtig herauskommen, wie die Operation es zeiget, wenn man nur eine Fertigkeit im Zusammenzehlen erlangt hat.

```
678345
  5321
  4894
------
688560
```

§. 36. Anmerk. Man hat bey dem Addiren eine sogenannte Neuner-Probe, nach welcher man in den summirenden Zahlen so

oft

oft 9. hinwegwirft, als in der Summe, wobey man aber auch diejenige Neuner mit einrechnen muß, die man bey dem Summiren hinweggeworfen hat; wenn beyderseits gleiches übrig bleibt, so hat man recht gerechnet. Dann sonst, wenn man nur die Neuner aus der Summe und den summirenden Zahlen wegwirft, ohne auf diejenige zu sehen, die man bey der Addition selbst weggeworfen hat, würde, wenn man gerad allemal um 9 fehlet, die Probe richtig, und doch das Exempel falsch gerechnet seyn. Z. E. Es ist grundfalsch, daß $548 + 572 = 2029$; und doch hält das Exempel die Neuner-Probe; wenn man blos die Neuner in der Summe und in den summirenden Zahlen wegwirft; der Fehler aber wird entdeckt, wenn man auf die bey der wirklichen Addition hinweggeworfene Neuner Achtung gibt.

§. 37. Anmerk. Die Addition muß zuweilen dem Aussprechen der Zahlen zu Hülfe kommen, besonders bey den sogenannten Vexier-Aufgaben; wenn man z. E. eilf tausend eilf hundert und eilf einem zu schreiben aufgibt, so muß er einzele Zahlen setzen, und sodann addiren, da dann die Summe ist 12111. Die Sache selbst ist übrigens von gar keiner Wichtigkeit.

§. 38. **Lehrsatz.** Eine kleine Zahl wird von einer grössern **abgezogen**, wenn man die Zahlen so untereinander schreibt, daß Einheiten auf Einheiten, Zehner auf Zehner, Hunderter auf Hunderter, oder wenigstens auf ihre Stellen, wenn Nullen da sind, zu stehen kommen; da man dann von der Rechten zur Linken die Einheiten, Zehner u. s. w. subtrahirt, bis alles abgezogen ist was man verlangt. Wenn alle Zahlzeichen der obern Reyhe gröser sind, als der untern, so ist die Sache vor sich klar genug. Wenn aber einige Zahlzeichen der obern Zahl kleiner als der untern sind, oder wenn gar Nullen vorhanden wären, so entlehnt man von den höhern Stellen zur Linken eine Einheit der Zehner, oder der Hunderter, oder der Tausender u. s. w. welche in der nächst niedern Stelle allemal das Zehenfache seyn wird, weil eine Einheit der Hunderter zehen Zehner, eine Einheit der Tausender zehen Hunderter u. s. w. gibt.

gibt. In welchem Fall man allemal wird subtrahiren können. Was endlich die Nullen betrifft, so ist es entweder eine, oder es sind mehrere hintereinander: ist es eine einige, so wird durch das Entlehnen 10 daraus, weil 10 + 0 = 10, davon man allemal die untere Zahl abziehen kann; stehen aber mehrere hintereinander, so geht man so weit zur Linken, bis man ein Zahlzeichen findet, sollte es auch in der Millionen Stelle von der Einheit an gerechnet seyn, davon man entlehnen kann, da dann die dazwischen liegende Nullen zu Neuner werden, weil z. E. 1000 — 1 = 999 und 2000 — 1 = 1999 oder 3000 — 2 = 2998. u. s. w. Denn wenn die letzte Null in 10 verwandelt wird, so müssen alle vorhergehende in 9 verwandelt werden, wie die bey den Zahlen angenommene Combinations-Lehre zeiget; z. E. 2000 = 1990 + 10.

§. 39. Anmerkung. Exempel machen die Sache deutlich; wir setzen fünf Fälle. Der I. ist, wenn alle untere Zahlen kleiner als die obere sind;

3648
2125
1523

Da es heißt: 5 von 8 läßt 3 (Einheiten) 2 von 4 läßt 2 (Zehner) 1 von 6 läßt 5 (Hunderter) 2 von 3 läßt 1 (Tausender). Die Differenz ist also 1523.

II. Fall, wenn die untere Zahlen theils kleiner, theils gleich groß sind mit den obern, und noch über das die untere Reyhe weniger Zahlzeichen hat;

5482
472
5020

Da es heißt: 0 von 2 geht auf, läßt keine Einheit, also setzt man eine Null in die Stelle der Einheit; 7 von 8 läßt 1 (Zehner) 4 von 4 läßt keinen Hunderter, also setzt man eine 0 in die Stelle der Hunderter; nichts von 5 läßt 5 (Tausender) denn es ist eben so viel, als ob unter dem 5 eine Nulle stünde.

III. Fall, wenn in der untern Zahl einige grösere Zahlzeichen sich befinden als in der obern, da man dann von den höhern Stellen entlehnt;

6 5 . 3 . 2
2 4 9
6 2 8 3

z. E. 9 von 2 läßt sich nicht abziehen, man entlehnt also aus der Stelle der Zehner eine Einheit, die hernach 10 Einheiten gibt; 10 + 2 machen 12, davon läßt sich 9 abziehen, und der Rest ist 3; ferner 4 von 2, weil der Dreyer eine Einheit verlohren hat, läßt sich wieder nicht abziehen, man entlehnt dahero von 5 aus der Stelle der Hunderter eine Einheit, die zehen Zehner gibt, 10 + 2 gibt 12, davon läßt sich 4 abziehen, und der Rest ist 8; 2 von 4, weil 5 eines verlohren hat, läßt 2; nichts von 6 läßt 6. Dahero die Differenz richtig gefunden ist.

IV. Fall, wenn Nullen theils oben theils unten vorhanden sind.

6 0 4 . 0 2
5 0 0 6 1
1 0 3 4 1

1 von 2 läßt 1, 6 von 0 geht nicht an, man entlehnt eins, so wird die Nulle zehen; 6 von 10 läßt 4; 0 von 3 läßt 3; 0 von 0 läßt 0, 5 von 6 läßt 1.

V. Fall, wenn oben mehrere Nullen nach einander vorhanden sind.

7 . 0 . 0 . 2 . 0 . 0 . 4
1 0 0 3 0 2 5
5 9 9 8 9 7 9

5 von 4 läßt sich nicht subtrahiren, und weil nächst vorher Nullen stehen, so entlehnt man aus der Stelle der Tausender eine Einheit, durch welches Entlehnen die zwo Nullen zu Neuner werden, weil von der letztern, die eigentlich 10 worden, auch eine Einheit zu den 4 hinweg kommt. Nun kann man entlehnen: 5 von 14 läßt 9; 2 von 9 läßt 7, 0 von 9 läßt 9; 3 von 1 geht nicht an, man entlehnt also aus der Stelle der Millionen, und sagt 3 von 11 läßt 8, 0 von 9 läßt 9, 0 von 9 läßt 9, 1 von 6 läßt 5.

§. 40. Anmerk. Man hat noch eine Methode bey dem Entlehnen, die aber ohne Noth gekünstelt und weitläuftiger als diese ist, wenn man nemlich des Subtrahendi folgende Stelle mit einem Punkt bezeichnet, dadurch sie um eine Einheit vermehrt wird, z. E. 9 von 18 läßt 9, 7 von 14 läßt 7, 3 von 5 läßt 2. Diese widersinnische Art zu subtrahiren ist zwar richtig, denn es kommt eben so viel heraus, wenn man sagt, 9 von 18 läßt 9, 6 von 13 läßt 7, 2 von 4 läßt 2: aber sie ist nicht in der Natur der Subtraction und des Wehrts der Zahlzeichen gegründet; indeme die untere Zahlen niemalen wirklich vermehrt werden, wenn man oben etwas entlehnt.

5 4 8
2 . 6 . 9
2 7 9

§. 41. **Zusatz.** Wenn man die Differenz und die subtrahirte Zahl wiederum zusammen addirt, so kommt die zu vermindernde Zahl (numerus minuendus) wieder heraus: denn wenn man von einem Ganzen was hinwegnimmt, und addirt das hinweggenommene wieder zu dem verminderten Ganzen, so muß das vorige Ganze wieder herauskommen. Diß heißt man auch die **Probe der Subtraction.** Eben so erhellt, daß, wenn man von der Summe einige Reyhen der summirenden Zahlen subtrahirt, die übrige summirende Zahlen die Differenz geben. Auf diese Weise dienen die Addition und Subtraction einander wechselsweise zur Probe.

§. 42. **Lehrsatz.** Alle Producte der neun einfachen Zahlen lassen sich finden, wenn man die neun Zahlzeichen in einer Horizontal-Reyhe schreibt, und in den Vertical-Reyhen herabwärts eine jede neunmal nach einander zu sich selbst addirt, da dann die von beeden Seiten gezogene Parallelen die Producte richtig zeigen werden. Z. E. 3 mal 4 weiset im Parallelogramm auf 12, 8 mal 7 auf 56, u. s. w.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 43. **Zusatz.** Ist einer von den Factoribus ein Zehner, Hunderter, oder überhaupt von höherer Ordnung, so darf man nur das Product mit der höhern Ordnung multipliciren: z. E. 300. 6 = 3. 6. 100 = 18. 100 = 1800. Eben so macht mans, wenn beede Factores höherer Ordnung sind: z. E. 300. 40 = 3. 4. 100. 10 = 12. 100. 10 = 12000. Folglich kann man das angegebene Rechentäfelein für alle Zahlen gebrauchen, man heißt es sonst das **Einmal Eins.**

§. 44. **Lehrsatz.** Zwo Zahlen werden mit einander multiplicirt, wenn man die Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. w. des einen Factors mit den Einheiten, Zehnern, Hundertern u. s. w. des andern multiplicirt, und die Partialproducte addirt, da dann die Summe dem ganzen Product gleich seyn muß, weil das Ganze seinen Theilen zusammen genommen gleich ist.

§. 45. **Anmerk.** Die Sache wird durch ein Exempel deutlich werden. Es gibt zween Fälle: der erste ist, wenn der eine Factor nur ein Zahlzeichen hat, der andere, wenn beede mehrere Zahlzeichen haben. Ein Exempel des ersten Falls ist das folgende:

3428
6

48
12
24
18

20568

6. 8 sind 48 (Einheiten) 6. 2 sind 12 (Zehner) 6. 4 sind 24 (Hunderter) u. s. w. Diese Partial-Producte, in ihre Stelle gesetzt, geben durch die Addition die untere Summe; 20568. Das Exempel wird aber kürzer gerechnet, wenn man die Zehner, Hunderter u. s. w. im Sinn, wie in der Addition, behält; da es dann heißt: 6. 8 sind 48, setze 8, behalte 4; 6 mal 2 sind 12 und 4 behalten sind 16, setze 6, behalte 1 (Hunderter); 6 mal 4 sind 24, und 1 behalten sind 25, setze 5, behalte 2 (Tausender), 6 mal 3 sind 18 und 2 behalten sind 20 (Tausender); wie beygesetztes Exempel in Zahlen zeiget; und dadurch wird der II. Fall desto leichter: wenn nemlich beede Factores mehrere

3428
6

20568

Ziffer

3452
346
20712
13808
10356
1194392

Ziffer haben, z. E. 6.2 sind 12, setze 2 behalt 1, 6.5 sind 30 und 1 behalten sind 31, setze 1 behalt 3 u. s. w. hernach multiplicirt man mit dem Factor der Zehner, 40.2 sind 80, oder 8 Zehner, in die Stelle der Zehner gesetzt, da die Nulle wegbleiben kann, u. s. w. endlich mit dem Factor der Hunderter, 300.2 = 600, oder 6 in die Stelle der Hunderter gesetzt, da dann wieder beede Nullen wegbleiben können; die Partial-Producte addirt man, so ist die Summe das ganze Product.

§. 46. Anmerk. Wenn ein Factor am Ende Nullen hat, so wird nur mit den Zahlzeichen multiplicirt, z. E. 423.200 = 423.2.100 = 846.100 = 84600, und die Nullen werden nach geschehener Multiplication angehängt. Und wenn ein Factor in der Mitte Nullen hat, so wird die nächstfolgende Reyhe um so viel Stellen weiter hinausgerückt, als Nullen in einem fort stehen: weil man sonst eine ganze Reyhe Nullen ohne Noth schreiben müßte. Der Grund von dieser Abkürzung der Rechnung erhellet aus §. 43.

4235	52832
302	2006
8470	316992
12705	105664
1278970	105980992

§. 47. **Lehrsatz.** Eine Zahl wird durch eine andere kleinere **dividirt**, wenn man sucht, wie vielmal der Divisor in den höchsten Ziffern des Dividendus, und so weiter in allen nachfolgenden enthalten ist, z. E. in den Tausendern, Hundertern, Zehnern, Einheiten; und die Partial-Quotienten hernach addirt; oder weil die Stellen des Quotienten durch die nachfolgende selbst bestimmt werden, nur, um die Weitläuftigkeit im Schreiben zu vermeiden, in der Ordnung ohne Nullen fortschreibt.

§. 48. Anmerk. Es gibt bey der Division zween Hauptfälle wie bey der Multiplication; nemlich wenn der Divisor ein einiges Zahlzeichen ist, und zweytens, wenn er aus mehrern besteht;

5945	1000
(5)	100
5000	80
945	9
(5)	1189
500	
445	
(5)	
400	
45	
(5)	
45	
0	

I. Fall. 5 ist in 5 Tausendern enthalten 1000 mal, diese 1000 mit 5 multiplicirt geben 5000, und von der ersten Zahl abgezogen lassen 945; 5 in 9 Hunderter sind enthalten 100 mal: dieser Quotient mit 5 multiplicirt gibt 500, welche von 945 abgezogen 445 übrig lassen; 5 in 44 Zehner sind enthalten 80 mal, 80 . 5 sind 400, diese von 445 abgezogen lassen 45; 5 in 45 Einheiten sind enthalten 9 mal, 5 . 9 ist 45, 45 von 45 läßt nichts. Wenn man nun die Partial-Producte addirt, so hat man 1189. Die Operation enthält den Beweis selbst, folglich auch von der kürzern, wenn man die Nullen wegläßt, und in einem fort die Quotienten schreibt, welches bey einfachen Divisoribus über sich so leicht als unter sich angeht, wie folgendes Exempel ausweißt:

4	
5945	1189.
5555	

Der andere Fall ist, wenn der Divisor aus mehr Zahlzeichen besteht, so sucht man, wie oft die kleinere Zahl in der unmittelbar darüber stehenden grösern enthalten sey; und weil man kein Einmal Eins für zusammengesetzte Zahlen hat, so muß man es eben versuchen, da dann der Fehler, wenn man allenfalls es nicht recht getroffen hätte, bey der Methode unter sich zu dividiren, leicht entdeckt und verbessert werden kann. Z. E.

7654	$206\frac{3}{3}\frac{2}{7}$
(37)··	
74··	
25·	
(37)·	
00·	
254	
(37)	
222	
32	

7654 sollen durch 37 dividirt werden; da man sagt, 3 in 7 ist zweymal enthalten, 2 . 37 ist 74, diß von der obigen Zahl 76 subtrahirt läßt 2, wozu man die folgende Zahl 5 herabsetzt; 3 in 2 ist kein ganzes mal enthalten, man setzt also in den Quotienten 0, und weil 0 . 37 = 0, so bleiben 25 ganz übrig, wozu man die folgende Zahl 4 setzt, und abermal den Divisor unterschreibt; 3 in 25 ist wegen dem folgenden 7 des Divisors nur 6mal enthalten, oder 37 in 254 ist 6 ganze mal enthalten; 6 . 37 = 222, diese Zahl von der obigen abgezogen läßt 32, welche Zahl nicht mehr ganz dividirt werden kann, man

man schreibt sie daher zum Quotienten als einen Bruch $\frac{3}{3}\frac{2}{7}$, davon im folgenden gehandelt wird.

§. 49. **Zusatz.** Wenn die erste Zahl des Divisors gröser ist als des Dividendus, so wird der Divisor um eine Stelle weiter zurückgesetzt. Z. E.

4.236 | 68 $\frac{20}{28}$
(62) |
3721 |

5.16
(62)
496
20

§. 50. **Zusatz.** Wenn an dem Ende des Divisors Nullen stehen, so werden von dem Dividendus so viel Zahlzeichen am Ende abgeschnitten, als der Divisor Nullen hat; z. E. 3248 dividirt durch 200 ist 1

32 | 48 = $16\frac{48}{200}$
32 | 00

§. 51. **Anmerk.** Die Art und Weise unter sich zu dividiren ist bis §. 50. vorgetragen worden; sie ist die leichteste, und der Sache am meisten gemäß, indem die Producte ordentlich unter einander geschrieben werden, daß nicht leicht eine Verwirrung entstehen kann. Wer das über sich Dividiren gewohnt ist, wird wohl thun, wenn er auch diese Art lernet, weil man doch sie kennen muß, wenn man Quadrat- und Cubicwurzeln ausziehen will: bey einfachen Divisoribus ist es schneller geschehen, wenn man über sich dividirt; sonst aber ist die Art unter sich zu dividiren allemal vorzuziehen. Uebrigens sieht das obige Exempel §. 48. wenn man über sich dividirt, folgendermassen aus:

2(32 | 206
7684 | man muß nemlich alle Producte im Kopf
3333 | behalten und abziehen können.
33

§. 52. **Zusatz.** Wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und wenn was übrig geblieben ist, zum Product addirt, so muß der Dividendus wieder herauskommen; und wenn man das Product durch einen von den Factoribus dividirt, so muß der andere Factor wieder herauskommen, woferne man im Rechnen nicht gefehlet hat; auf diese Weise dienen die Multiplication und Division einander gegenseitig zur Probe.

§. 53. **Zusatz.** Eine Zahl durch Eins multiplicirt oder dividirt wird nicht verändert. $6 . 1 = 6$. und $\frac{6}{1} = 6$.

Die Rechnung in Brüchen.

§. 54. **Erklärungen.** Wenn ein Ganzes in etliche oder mehrere gleiche Theile getheilet wird, so heißt man einen oder mehrere Theile die von diesem Ganzen genommen werden, in Vergleichung mit dem Ganzen einen **Bruch** (fractio). Diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilet worden, heißt der **Nenner**, (denominator); die andere Zahl, welche anzeigt, wie viel Theile genommen werden, heißt der **Zehler**, (numerator); den Zehler schreibt man oben, und den Nenner unten, so, daß beede durch einen Querstrich abgesondert werden; z. E. $\frac{4}{7}$. Wenn der Zehler kleiner ist als der Nenner, so heißt der Bruch ein **eigentlicher** Bruch (fractio propria), **uneigentlich** aber, oder (fractio spuria), wenn der Zehler gröser ist als der Nenner; z. E. $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{7}$ sind uneigentliche Brüche.

§. 55. **Anmerk.** Man kann die Brüche wie die Quotienten in der Division ansehen; weil aber in einem eigentlichen Bruch

der

der Nenner im Zehler nicht ein ganzes mal enthalten ist, so fragt sichs, wie oft ein gegebener Theil vom Ganzen, oder was für ein Theil vom Ganzen in dem Zehler enthalten sey; z. E. in dem Bruch $\frac{7}{10}$ ist die grose Zahl 10 in der kleinen 7 kein ganzes mal enthalten; oder das Ganze selbst ist in 10 Theile abgetheilt worden, und der zehente Theil vom Ganzen ist in dem Zehler siebenmal enthalten.

§. 56. **Lehrsatz.** Brüche bleiben unverändert, wenn man den Zehler und Nenner mit einer und eben derselben Zahl multiplicirt: denn wenn beede mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so ist es eben so viel, als ob sie mit eins multiplicirt oder dividirt würden; weil $\frac{6}{6} = 1$, oder allgemein $\frac{m}{m} = 1$; diese Multiplication und Division durch eins läßt die Grösse unverändert §. 53. Oder auf folgende Weise: Wenn der Zehler und Nenner mit einer und eben derselben Zahl multiplicirt werden, so wird der Bruch durch die eine Multiplication um so viel gröser, um so viel er durch die andere wieder kleiner wird. Folglich muß er ungeändert bleiben. Eben das gilt bey der Division, z. Ex. $\frac{5}{6} = \frac{5:3}{6:3} = \frac{1}{2}\frac{5}{8}$; und wiederum $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$.

§. 57. **Zusatz.** Man kann also leicht Brüche von verschiedenen Nennern unter einerley Benennung bringen, das heißt, schaffen, daß sie alle einerley Nenner bekommen, wenn man nur einen jeden Bruch durch den Nenner des andern, oder wenn es mehr als zween sind, einen jeden Bruch, das ist, Zehler und Nenner, in das Product aller übrigen Nenner, seinen eigenen ausgenommen, multiplicirt. z. E. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20}$, oder $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{5}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{5}$ $= \frac{20}{30} + \frac{15}{30} + \frac{24}{30}$.

§. 58. **Zusatz.** Eben auf diese Weise ist leicht zu urtheilen, ob ein Bruch gröser oder kleiner als der andere sey; wenn man sie nur vorher unter einerley Benennung gebracht hat. So ist unter den drey Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$ der letzte der größte, und der mittlere der kleinste, weil $\frac{24}{30} > \frac{20}{30} > \frac{15}{30}$.

§. 59. **Zusatz.** Brüche kann man daher auch leicht aufheben, das ist, kleiner ausdrücken, wenn sich Zehler und Nenner mit einer dritten Zahl genau dividiren lassen.

§. 60. Anmerk. Die Divisores von grosen Zahlen muß man durch Uebung finden lernen, oder wenn man es nicht schnell genug kann, den Nenner durch den Zehler so lange dividiren, als er sich dividiren läßt, die letzte Zahl wird hernach beede dividiren, und den Bruch aufheben. Sonsten hat man folgende Regel, die Divisores schnell zu finden: man setze die Buchstaben des Alphabeths, a, b, c; a sollen die Einheiten, b die Zehner, c die Hunderter bedeuten u. s. w. so wird der allgemeine Ausdruck aller Zahlen seyn $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f$ u. s. w. Dann obschon die Buchstaben b, c, d, e, ꝛc. eben wieder die 9 Zahlzeichen, wie der Buchstaben a bedeuten, und also einiger massen überflüßig scheinen, so habe ich sie doch auch hier wieder beybehalten, damit man sogleich sehe, die wievielte Ordnung im Localwehrt, den ich sonst durch neue Zahlzeichen hätte bestimmen müssen, jedesmal vorkomme; diß dient statt einer Antwort auf eine sehr freundschaftliche Erinnerung in einer gewissen berühmten gelehrten Zeitung. Dividirt man nun diese allgemeine Zahl durch die 9 erste Zahlzeichen oder auch mit den folgenden, und merkt auf die Reste, so kann man gewisse Regeln machen.

2	a
3	$a + b + c + d + e + f$
4	$a + 2b$
5	a
6	$a + 4b + 4c + 4d + 4e$ &c.
7	$a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5c + g + 3h + 2i + 6k$ &c.
8	$a + 2b + 4c$
9	$a + b + c + d + e$ &c.
10	a
11	$a + 10b + 10d + e + 10f$ &c. das ist
	$a - b + c - d + e - f$ &c.

Das gibt folgende Regeln. 1. Wenn sich das letzte Zahlzeichen durch 2, oder 5, oder 10 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl durch

durch 2, 5, und 10 dividiren. 2. Wenn sich die Summe aller Zahlzeichen durch 3 oder 9 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl dadurch dividiren u. s. w. Denn z. E. $a + 10b + 100c + 1000d$ dividirt durch 2, ist $\frac{a}{2} + 5b + 50c + 500d$ u. s. w. es gibt also bey allen folgenden Zahlen keinen Bruch; wenn dahero $\frac{a}{2}$ sich ganz dividiren läßt ohne Bruch, so läßt sich die ganze Zahl gewiß dadurch dividiren.

§. 61. **Lehrsatz.** Brüche lassen sich **addiren** und von einander **subtrahiren**, wenn man, woferne sie einerley Nenner haben, nur die Zehler addirt oder von einander subtrahirt, und hernach den gemeinschaftlichen Nenner darunter setzt. Denn der Nenner ist der Name des Bruches: was aber gleichnamig ist, das kann man zusammen zehlen; sind aber die Nenner verschieden, so muß man sie vorher unter einerley Benennung bringen, und hernach addiren oder subtrahiren.

Exempel $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$; $\frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{2}{8} = 1\frac{1}{4}$. So ist die Summe der Brüche §. 57. zusammen $\frac{5}{3}\frac{9}{0} = 1\frac{9}{3}\frac{9}{0}$.

§. 62. **Zusatz.** Man begreift von selbst, wie man bey der Addition, wenn mehrmalen uneigentliche Brüche herauskommen, solche Brüche in ganze Zahlen verwandeln könne, wenn man nur wirklich mit dem Nenner dividirt, und was übrig bleibt, als einen Bruch setzt, den man nach Befinden aufheben kann, wie denn $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. nach §. 59.

§. 63. **Zusatz.** Wenn man ganze Zahlen und Brüche addiren will, so muß man sie unter einerley Benennung bringen, das ist, die ganze Zahl als einen uneigentlichen Bruch ansehen, dessen Nenner $= 1$, und sodann nach geschehener Reduction unter einerley Benennung addiren. z. E. $4 + \frac{3}{8} = \frac{4}{2}$

$= \frac{4}{1} + \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8}{1 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 8} = \frac{32}{8} + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$. Eben das gilt bey der Subtraction, z. E. $5 - \frac{3}{4} = \frac{5}{1} - \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{20 - 3}{4} = \frac{17}{4}$.

§. 64. **Zusatz.** Wenn man die Differenz zu dem subtrahirten Bruch wieder addirt, so kommt der erste Bruch heraus. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ und $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

§. 65. **Lehrsatz.** **Brüche** werden mit einander **multiplicirt**, wenn man Zehler mit Zehlern und Nenner mit Nennern multipliicirt: denn es ist eben so viel, als ob man den Bruch als ein Ganzes ansiehet, das wieder in so viel Theile getheilet wird, als des Multiplicators Nenner Einheiten hat; von diesen Theilen nimmt man so viel, als der Zehler Einheiten in sich begreift; das aber geschieht, wenn man Nenner mit Nennern und Zehler mit Zehlern multiplicirt; man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{5}$ multipliciren; $\frac{3}{4}$ sey A $\frac{2}{5}$ sey B. so ist, weil

$\frac{3}{4} = A$ | $\frac{2}{5} = B$

$\cdot 4$ | $\cdot 5$

$3 = 4A$ | $2 = 5B$

$2 \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot A \cdot B$

$\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = A \cdot B$. : 4 · 5

das gesuchte Product;

setzt man nun statt der Zahlen lauter Buchstaben, so kann man den Satz in der höchsten Allgemeinheit erweisen.

§. 66. **Zusatz.** Das Product von zween eigentlichen Brüchen ist also kleiner als ein jeder Factor: denn man nimmt die gegebene Gröse nicht ein ganzes mal, sondern etwa ein halb, ein drittel mal u. s. w.

u. s. w. wie z. E. die Hälfte einer halben Ehlen noch einmal kleiner ist, als die halbe Ehle; so ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

§. 67. **Zusatz.** Wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch, oder einen Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt, so wird nur der Zehler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirt: denn man kann die ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner $= 1$; z. E. $6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$.

§. 68. **Zusatz.** Das Product aus einer ganzen Zahl in einem eigentlichen Bruch wird also auch kleiner als die ganze Zahl; weil sie nicht einmal ganz vielweniger mehrmalen genommen wird.

§. 69. **Zusatz.** Das Product von zween Brüchen steckt in dem einen Factor so oft, als der andere Factor in der Einheit steckt. z. E. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$; folglich $\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} : 1$ oder unter einerley Benennung $\frac{1}{3}\frac{2}{2} : \frac{2}{3}\frac{4}{2} = \frac{1}{2} : 1$.

§. 70. **Lehrsatz.** **Brüche** werden durch Brüche **dividirt**, wenn man den dividirenden Bruch umkehrt, das ist, den Nenner zum Zehler, und den Zehler zum Nenner macht, und hernach multiplicirt; denn wenn sie einerley Nenner haben, so fragt man nur, wie oft der Zehler des Divisors im Zehler des Dividendus stecke? z. E. $\frac{3}{8}$ ist in $\frac{7}{8}$ enthalten $\frac{7}{3}$ mal; oder $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$ dreymal. Haben sie aber verschiedene Nenner, so muß man sie unter einerley Benennung bringen, und hernach anzeigen, wie oft der Zehler des Divisors im Zehler des Dividendus enthalten sey: diese Arbeit aber wird erhalten, wenn man den Divisor umkehrt, und hernach multiplicirt; daher

her kein so weitläuftiges Geschäfte nöthig ist. z. E. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{6}{8} : \frac{4}{8} = \frac{6}{4} ; 9$ aber eben das kommt heraus, wenn ich $\frac{3}{4}$ durch den umgekehrten Divisor $\frac{1}{2}$ multiplicire, dann $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{4}$. Der Beweis wird allgemein, wenn man statt Zahlen Buchstaben setzt. Folglich darf man nur den Divisor umkehren, und hernach multipliciren.

§. 71. Zusatz. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man den Bruch umkehrt, und hernach multiplicirt; das ist, wenn man die ganze Zahl in den Nenner des Bruchs multiplicirt, und mit seinem Zehler das Product dividirt; denn man kann die ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner eins ist. z. E. $6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3}$.

§. 72. Zusatz. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt; aus obigem Grund §. 71. z. E. $\frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{5} : \frac{6}{1} : \frac{6}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30}$.

§. 73. Zusatz. Wenn man einen eigentlichen Bruch durch Brüche, oder auch eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt, so wird der Quotient gröser werden, als der Divideudus; weil ein Bruch in einem andern, und noch vielmehr in einer ganzen Zahl etlich ganze mal euthalten seyn kann und ist.

§. 74. Zusatz. Hingegeu wenn ein eigentlicher Bruch durch eine ganze Zahl dividirt wird, so wird der Quotient kleiner; welches ebenfalls geschiehet, wenn uneigentliche Brüche einander dividiren.

§. 75. Zusatz. Der Dividendus enthält den Divisor so oft in sich, als der Quotient die Einheit.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$

$\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$; folglich $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3} : 1$, oder unter einerley Benennung $\frac{4}{12} : \frac{3}{12} = \frac{8}{3} : \frac{3}{3}$.

§. 76. **Zusatz.** Wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, so kommt der Dividendus heraus; und wenn man das Product durch einen Factor dividirt, so kommt der andere Factor heraus.

§. 77. **Zusatz.** Hat man Brüche, die an ganzen Zahlen hangen, und solle damit rechnen, so ist es am besten, wenn man alles unter einerley Benennung bringt, und sodann das verlangte berechnet. z. E. $3 + \frac{2}{5} : 5 - \frac{1}{2} = \frac{15+2}{5} : \frac{10-1}{2} = \frac{27}{5} \cdot \frac{2}{9}$ $= \frac{3}{4}\frac{4}{5}$. In der practischen Arithmetik werden sich einige andere Vortheile noch sagen lassen.

§. 78. **Zusatz.** Wenn man den Zehler eines Bruchs mit einem Bruch multiplicirt, so werden Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern multiplicirt; dann $\frac{2}{3}\overset{\cdot 5}{7} = \frac{2}{3} \cdot 5 : 7 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$. nach §. 72. Hingegen wenn man den Nenner eines Bruchs mit einem Bruch multiplicirt, so wird der multiplicirende Bruch umgekehrt. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{3} \cdot 5 : 7 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$.

§. 79. **Zusatz.** Dividirt man den Zehler eines Bruchs mit einem Bruch, so ist es eben so viel, als ob man den ganzen Bruch damit dividirte; $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 7}{5} = \frac{2 \cdot 7 : 5}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$; dividirt man aber den Nenner mit einem Bruch, so ist es eben so viel, als ob man den ganzen Bruch damit multiplicirte; $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 7}{5} = \frac{2}{3} \cdot 7 \cdot 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$. nach §. 67. 72. Man heißt

heißt dergleichen Brüche sonst auch fractiones fracticlas, ehe sie noch aufgelöst werden.

Von Decimal- und Sexagesimal-Brüchen.

§. 80. **Erklärungen.** Ein **Decimal-** oder **zehentheiliger Bruch** ist ein Bruch, dessen Nenner nach dem Gesetz der decadischen Arithmetik fortgehen, und also 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. sind. z. E. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{6}{1000}$ sind Decimalbrüche; welche zusammengesetzt $\frac{345}{100}$ heissen; man läßt aber, um alle Weitläuftigkeit zu vermeiden, die Nenner im Schreiben weg, weil man sie jedesmal leicht hinzudenken kann, der Nenner ist nemlich allemal die Einheit mit so viel angehängten Nullen, als der Zehler Zahlzeichen hat. Die ganze Zahlen vor den Decimalbrüchen werden mit einem , oder . von den Brüchen abgesondert, und heissen in der logarithmischen Rechnung die Characteristik. z. E. 3,4682 ist $3,\frac{4682}{10000}$, 3 Ganze, 4 Zehentheile, 6 Hunderttheile u. s. w. Wenn kein Ganzes vorhanden ist, so kommt eine Nulle in die Stelle, z. E. 0,347 $= 0,\frac{347}{1000}$, kein Ganzes, aber 3 Zehentheile, 4 Hunderttheile u. s. w.

§. 81. **Lehrsatz.** Ein jeder Bruch kann in Decimalbrüche verwandelt werden, wenn man dem Zehler so viel Nullen anhängt, auf wie viel Ziffer man die zehentheilige Brüche fortsetzen will, wofern sich nemlich die Rechnung nicht selbst endiget, und hernach durch den Nenner gewöhnlicher massen divisirt. Der Beweis gründet sich auf §. 56. Der

Bruch

Bruch bleibt einerley, wenn oben und unten mit gleichem multiplicirt wird. Es geschieht aber dieses, wenn man Nullen anhängt und dividirt; denn $\frac{1}{2}$ $= \frac{1'0}{2} = 0,5 = 0,\frac{5}{10}$ weil $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10}$ und also ein Decimalbruch; $\frac{1}{4} = \frac{100}{4} = 0,25 = 0,\frac{25}{100}$ $= \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25}$.

§. 82. **Zusatz.** Wenn der Bruch durch die Division nicht genau sich ausdrücken läßt, so sucht man seinem wahren Wehrt so nah zu kommen, daß der Fehler kaum ein Milliontheilchen betrifft; z. E. $\frac{1}{3} = \frac{1,0000}{3} = 0,33333.. = 0,\frac{3}{10}\frac{3}{100}\frac{3}{1000}$; der Fehler ist hier kaum ein Milliontheilchen eines Ganzen.

§. 83. **Lehrsatz.** Man kann alle vier Rechnungsarten bey den Decimalbrüchen anbringen; der Beweis gründet sich auf die Lehre von den Potenzen, deren Exponente negativ sind; wir wollen ihn im zweyten Hauptstück vortragen, und inzwischen als einen Lehnsatz annehmen. Die Exempel werden die Rechnung doch deutlich machen.

§. 84. **Exempel der vier Rechnungsarten in Decimalbrüchen.**

Addition.

$\frac{3}{7} = 0,42857$
$\frac{4}{7} = 0,57142$
$\frac{7}{7} = 1 = 0,99999$

Man addirt von der Rechten zur Linken wie in der gewöhnlichen Addition mit ganzen Zahlen; weil aber die beede Brüche selbst nicht genau in Decimalbrüchen gegeben sind, so ist auch in der Summe ein Fehler von einem Hunderttausendtheilchen, den man für nichts achten darf; eigentlich sollten 1,00000 herauskommen; weil $\frac{7}{7} = 1 = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$.

Subtraction.

$\frac{5}{4} = 1, 25$
$\frac{1}{2} = 0, 5$
$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = 0,75 = \frac{1}{4}$

Bey der Subtraction befolgt man wieder die gewöhnliche Regeln; nur merkt man, daß, wenn bey einer Zahl kein Ziffer steht, wie bey 5, man in Gedanken eine o setzt, dann $\frac{1}{2} = 0, 5$ oder $0, 50$, weil $\frac{50}{100} = \frac{5}{10}$, folglich sagt man o von 5 läßt 5, 5 von 12 läßt 7, o von o läßt o.

Multiplication.

$\frac{5}{4} = 1, 25$
$\frac{8}{5} = 1, 6$

1, 25
0, 750

$\frac{40}{20} = 2,000$

In dem Exempel der Multiplication hat man mit der ersten Zahl zur Linken angefangen zu multipliciren, es ist aber gleichviel, wenn man von der hintersten Zahl anfängt; da die Partialproducte hernach gegen die linke Seite vorrücken, wie vorher gegen die rechte. Z. E.

1, 25
1, 6

0, 750
1, 25

2, 000

Die erste Manier aber ist gewöhnlicher; wenn einer oder beede Factores ohne Ende fortgiengen, und also nicht ganz wären, wo man sie abbricht: so geben sie auch kein genaues Product.

Division.

1, 6, 00 | 2, 56
(0, 6 2 5) |
1, 250

0, 35, 0, 0
(0, 6 2 5)
3215

3750
(0, 6 2 5)
3750

0

Die Division befolgt einerley Regeln mit der gewöhnlichen Art unter sich zu dividiren; nur muß man merken, daß man, so lang die Division fortgesetzt wird, jedesmal eine Nulle dem Rest des Dividendus anhängen muß, weil durch die angehängte Nullen die Decimalprogression von selbst sich bestimmt; geht es ohne Ende fort, so hört man auf, wo man glaubt, daß der Fehler klein genug und kaum merklich sey.

§. 85. **Erklär.** Sechzigtheilige Brüche sind solche Brüche, deren Nenner in der Progression 60, 60, 60, 60, 60, 60 u. s. w. fortgehen. Wenn also ein

ein Ganzes, wie z. E. die Stunden, in sechzig Theile, (Minuten) der sechzigste Theil wieder in sechzig kleinere Theile, (Secunden) u. s. w. eingetheilt werden, so bekommt man sechzigtheilige Brüche, (fractiones sexagesimales) man schreibt sie wie in der Geometrie die Minuten, Secunden, Terzen, z. E. 4 St. 50′ 20″ 30‴. Das ist 4 St. $+\frac{5}{60}+\frac{20}{60.60}+\frac{30}{60.60.60}$ einer Stunde, welche als die Einheit betrachtet wird; und weil 60 allemal auf die Einheit gehen, so kann man den obigen Ausdruck 4 St. u. s. w. auch schreiben $4.60+50+\frac{20}{60}+\frac{30}{60.60}$ u. s. w.

§. 86. **Zusatz.** Man kann also auch hier alle vier Rechnungsarten anwenden, nur muß man bey dem Entlehnen oder Behalten merken, daß man von der nächsten höhern Stelle das entlehnte nach der Sexagesimalprogression nehme, weil eine Einheit der höhern Ordnung nicht 10 sondern 60 von der unmittelbar niedern enthält.

§. 87. **Anmerk.** Die Exempel werden die Sache deutlich machen.

Addition.	
6 St.	04′ 32″ 08‴
20 St.	12′ 50″ 16‴
26 St.	17′ 22″ 24‴

Subtraction.	
12 St.	18′ 52″ 07‴
3 St.	20′ 04″ 12‴
8 St.	58′ 47″ 55‴

Dann 16 und 8 Terzen geben 24 Terzen; 50″ und 32″ geben 82″ das ist 1′ und 22″ die 1′ behalte ich für die höhere Stelle; 12′ und 4′ nebst 1′ die ich behalten, geben 17′; 6 und 20 St. geben 26. Eben so macht man es bey der Subtraction; 12‴ von 7‴ kann man nicht subtrahiren, man entlehnt also eine Secunde, die 60‴ gibt, 12‴ von 67‴ läßt 55; oder 2 von 7 läßt 5, 1 von 6 (weil die 0 durch das Entlehnen 6 wird) läßt 5; u. s. w. die leere Plätze zur Linken füllt man mit einer Nulle aus, damit man nicht so leicht fehle; dann $7''' = 07'''$; und weil man nie über 60 zehlt, so braucht man nur eine einige Stelle auszufüllen, welches geschiehet, so oft die Anzahl unter 10 ist.

Bey der Multiplication merkt man nur auf die obige Ausdrücke §. 85. z. E. man solle 17 St. mit 46‴ multipliciren, so ist das im Zeichen ausgedruckte Product = 17 . 60. $\frac{46}{60.60.60}$ = $\frac{17.46}{60.60}$ = $\frac{782}{60.60}$ = 782″ = 13′2″. Um diese letzte Division durch 60 zu ersparen, hat man einen Canon Hexacontad. schon gemacht, worinnen man alle Producte von 1 bis 60 nachschlagen kann, so ist 17 . 46 in dem Canon 13 02 ausgedruckt. Die Division hat auch keine Schwürigkeit, wenn man nur die Lehre von den Brüchen verstehet, wie wir sie vorgetragen haben. Denn z. E. 33′ : 16″ = $\frac{33}{60}$: $\frac{16}{60.60}$ = $\frac{33}{60}$. $\frac{60.60}{16}$ = $\frac{33.60}{16}$ = 123 + $\frac{12}{16}$ = 120 + 3 + $\frac{12}{16}$ = 2 . 60 + 3 + $\frac{12.60}{16.60}$ = 2 . 60 + 3 + $\frac{45}{60}$. wenn man beederseits mit 16 dividirt.

§. 88. Anmerk. Wie man diese Rechnung durch die Potenzen und durch die Vergleichung mit ihren theils positiven theils negativen Exponenten erweisen könne, wird im zweyten Hauptstück vorkommen.

§. 89. Anmerk. Der Nutzen der Sexagesimalbrüche zeigt sich vornemlich in astronomischen und chronologischen Rechnungen.

Von den Potenzen.

§. 90. **Erklärungen.** Wenn man eine Zahl mit sich selbst etlichmal multiplicirt, so ist das Product ihre **Potenz**, und zwar die zweyte, oder das Quadrat, wenn man sie zweymal, die dritte oder der Cubus, wenn man sie dreymal, die vierte, die fünfte, die sechste Potenz u. s. w. wenn man sie vier, fünf, sechsmal mit sich selbst multiplicirt. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Factor mit sich selbst multiplicirt worden, heißt der **Exponent**, und der einfache Factor die **Wurzel**. Wenn die Wurzel nicht genau sich ergibt, so heißt sie irrational. z. E. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{10}$.

§. 91. **Willkührl. Satz.** Den Exponenten schreibt man mit einer kleinen Ziffer, welche oben an

an die grose Ziffer angehängt wird; z. E. $4^3 = 64$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$. Die Wurzelzeichen haben wir schon erklärt: wenn man die Quadratwurzel verlangt, so wird kein Ziffer in das Wurzelzeichen gesetzt; verlangt man aber höhere Wurzeln, so muß allemal innerhalb dem Wurzelzeichen eine kleine Ziffer stehen, welche anzeigt, die wievielte Wurzel man wolle. z. E. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[4]{625} = 5$, $\sqrt[6]{1000000} = 10$.

§. 92. **Zusatz.** Das Quadrat eines Bruchs ist also das Quadrat des Zehlers dividirt durch das Quadrat des Nenners, und der Cubus eines Bruchs der Cubus des Zehlers dividirt durch den Cubus des Nenners, oder überhaupt die höhere Potenz eines Bruchs die Potenz des Zehlers durch eben die Potenz des Nenners dividirt; weil die Potenz eines Bruchs der Bruch mit sich selbst etlichmal multiplicirt ist. $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$, $(\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25}$. Eben so muß man auch, wenn man Wurzeln verlangt, aus dem Zehler und Nenner die nemliche Wurzel ausziehen. $\sqrt{(\frac{16}{25})} = \frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{(\frac{8}{27})} = \frac{2}{3}$.

§. 93. **Lehrsatz.** Eine jede Wurzel kann man ansehen, als bestünde sie aus zween Theilen, (radix binomia) denn eine Zahl mag groß oder klein seyn, so läßt sie sich in zween Theile zerfällen, z. E. $320 = 300 + 20$; $5 = 4 + 1$; $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ u. s. w.

§. 94. **Zusatz.** Wenn man also das erste Glied der Wurzel a und das andere b nennet, so kann der Ausdruck $a + b$ alle mögliche Wurzeln,

$(a+b)^2$ alle mögliche Quadrate, $(a+b)^3$ alle mögliche Cubos u. s. w. bedeuten.

§. 95. **Zusatz.** Der allgemeine Ausdruck des ersten Glieds kann daher in Zahlen viel einzele Stellen anzeigen; z. E. $3428 = 3000 + 400 + 20 + 8$, da dann $a = (3000 + 400 + 20)$ und $b = 8$, oder $(a+b)^2 = ((3000 + 400 + 20) + 8))^2$.

§. 96. **Lehnsatz.** Das Quadrat von $a + b$, wenn man es wirklich ausdruckt, ist $a^2 + 2ab + b^2$; wie im zweyten Hauptstück erwiesen werden soll; folglich bestehen alle mögliche Quadrate aus dem Quadrat des ersten Glieds, aus dem doppelten Product der Glieder, und aus dem Quadrat des zweyten Gliedes.

§. 97. **Zusatz.** Man kann also das zweyte Glied jedesmal finden, wenn man, nach abgezogenem Quadrat des ersten Glieds, den Rest durch die doppelte Wurzel des abgezogenen Quadrats dividirt, da man dann das Product dieses Divisors in das zweyte gefundene Glied nebst dem Quadrat dieses Gliedes nochmalen subtrahirt, und hernach wiederum die zwey gefundene Glieder als eines, nemlich als das erste ansiehet, durch dessen Duplirung man das neue Glied auf eine ähnliche Weise suchet.

§. 98. **Lehnsatz.** Ein jeder Cubus von $a + b$ oder $(a+b)^3$ wirklich ausgedruckt, heißt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; daher besteht er aus dem Cubus des ersten Glieds, aus dem dreyfachen Product des Quadrats des ersten Glieds in das zweyte, aus dem dreyfachen Product des ersten Glieds in das Quadrat des zweyten, und aus dem Cubus des zweyten Glieds.

§. 99.

§. 99. **Zusatz.** Man kann also das zweyte Glied finden, wenn man nach Abzug des Cubus vom ersten Glied den Rest mit dem dreyfachen Quadrat des ersten Glieds dividirt, hernach die drey Partialproducte abziehet, und was abermal übrig bleibt, auf eine ähnliche Weise behandelt, wenn man nur merkt, daß man die zwey gefundene Glieder als eines ansehen, und dahero mit ihrem dreyfachen Quadrat wieder dividiren muß u. s. w.

§. 100. **Anmerk.** In der Zahlenrechnung verlangt man nur Quadrat- und Cubicwurzeln; höhere Potenzen kommen selten vor; man hat zu dem Ende für die Zahlen das Wurzeltäfelein nur bis auf die Cubiczahlen berechnet: wir wollen die Biquadrate noch hinzuthun: sie gehen in vierfacher Ordnung bis auf 9, oder 10, wie folgende Tabell zeigt:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Biquadrate	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000

Aus diesem Täfelein erhellt, daß von eins bis 9 kein Quadrat mehr als zwey, und kein Cubus mehr als drey, und kein Biquadrat mehr als vier Zahlzeichen, wohl aber weniger enthalte.

Von Ausziehung der Quadratwurzel in Zahlen.

§. 101. **Lehrsatz.** Weil kein Quadrat von eins bis neun mehr als zwey Zahlzeichen hat, so theilt man die gegebene Zahl in Classen von der Rechten zur Linken ein, da dann die äusserste zur Linken auch nur ein Zahlzeichen haben kann, weil es auch solche Quadrate gibt; §. 100. Von der äussersten Classe zur Linken wird das nächst kleinere Quadrat,

das man im Wurzeltäfelein sucht, abgezogen, und die im Wurzeltäfelein darüber stehende Wurzel in die Stelle des Quotienten gesetzt; diese Wurzel oder diesen Quotienten duplirt man, und dividirt damit den Rest; der Quotient ist das zweyte Glied; §. 97. das Product des zweyten Glieds oder des neuen Quotienten in den Divisorem, und das Quadrat des zweyten Glieds zieht man von dem dividirten Rest ab, und was übrig bleibt, dividirt man abermal mit dem doppelten Quotienten, dessen zwey Glieder nur für eines angesehen werden, §. 97. u. s. w. bis entweder die Wurzel genau sich ergibt, oder bis man, wenn sie nicht genau kann gefunden werden, durch anhängen je zwoer Nullen, die Division in Decimalbrüchen so lang fortgesetzt hat, als man für nöthig findet, um etwa den Fehler auf Millionentheilgen herabzusetzen, daß er kaum merklich ist

§. 102. **Zusatz.** Wenn man das zweyte Glied zum Divisor in die nächstfolgende Stelle setzt, und hernach diese vermehrte Zahl mit dem zweyten Glied multiplicirt, so kommt das doppelte Product der Glieder und das Quadrat des zweyten Glieds heraus; denn 4 sey das erste Glied doppelt, also der Divisor, und 3 das zweyte Glied, so ist $(40+3)\cdot 3 = 43\cdot 3 = 40\cdot 3 + 3\cdot 3 = 2\cdot 20\cdot 3 + 3\cdot 3 = 2ab + bb$. Daher man jedesmal nur den neuen Quotienten der unmittelbar niedrigern Stelle an den Divisor hinsetzen darf, um die Rechnung abzukürzen.

§. 103. **Zusatz.** Bey den angehängten Nullen ist es nicht nöthig, im Quotienten die Nenner, welche in der Decimalprogression fortgehen, wirklich

zu

zu schreiben, wenn man nur durch ein Strichlein nach den ganzen Zahlen anzeigt, daß jetzo die Decimalbrüche anfangen: daß aber durch die angehängte Nullen die Zahl nicht vermehrt werde, erhellt daher, weil man sie eigentlich mit einem Bruch, dessen Nenner dem Zehler gleich ist, nemlich $\frac{100}{100} = 1$ multiplicirt, welches die Zahl nicht vermehrt; sondern nur behülflich ist, den Rest der Wurzel genauer zu finden.

§. 104. Anmerk. Die Sache läßt sich durch Exempel am besten erläutern. Man solle aus 1703025 die Quadratwurzel ausziehen; man theilt die Zahl in Classen von der Rechten zur Linken, und gibt jeder Classe zwey Zahlzeichen §. 100, auf der äussersten zur Linken darf auch eins stehen. Von dieser äussersten Classe wird das gleiche oder nächst kleinere Quadrat abgezogen: hier ist es das gleiche nemlich 1 und die Wurzel ist auch 1; der Rest 70 wird herabgesetzt, und mit der doppelten Wurzel dividirt; die doppelte Wurzel ist 2, die man unter die 7 setzt, weil sie eigentlich 20, oder wegen den folgenden Stellen 2000 ist; mit 2 dividirt man, und setzt in den Quotienten 3; diese 3 setzt man neben die 2 nach §. 102. und multiplicirt diese Zahl 23 mit dem neuen Quotienten 3; das Product 69 subtrahirt man von 70; und zum Rest 1 setzt man die folgende Classe 30 herab; den Quotienten 13 sieht man nun als das erste Glied an, und duplirt es, damit man $2 \cdot 13 = 26$ zum Divisor bekomme; man unterschreibt ihn so, daß seine letzte Zahl 6 unter die erste Zahl 3 der folgenden Classe zu stehen kommt; weil er eigentlich 260 ist; der Quotient ist $= 0$, denn 26 in 13 ist 0 mal enthalten; diesen Quotienten $= 0$, setzt man neben die 6, und multiplicirt alles mit dem neuen Quotienten $= 0$, so kommt 0 heraus; das subtrahirt von dem obigen, läßt die Zahl 130 ganz; man setzt die folgende Classe 25 dazu herab; sieht 130 als das erste Glied an, duplirt es, und bekommt den Divisor 260, dessen letztes Zahlzeichen, die Nulle unter die erste der folgenden Classe, nemlich unter 2 geschrieben wird, aus schon gemeldten Gründen; man di-

1	70	30	25	1305
1				
	70			
	(23			
	69			
	1	30		
		(260)		
		000		
		130	25	
			(2605)	
			13025	
			0	

vidirt wirklich, setzt den Quotienten 5 herab: multiplicirt alles damit; das Product subtrahirt man; und der Rest ist nichts.

§. 105. Anmerk. Will man die Quadratwurzel aus einer Zahl die kein vollkommenes Quadrat ist, ausziehen, so geschiehet solches durch Näherung (per approximationem) indeme man der gegebenen Zahl so vielmal je zwo und zwo Nullen anhängt, als man glaubt, daß zur Näherung genug seye, nach §. 100. 103. Die Sache wird durch ein Exempel deutlich werden. Man solle die Quadratwurzel aus 3 ausziehen, so setzt man 3, und sucht das

```
3 | 1,73205.... = √3
1 |
--------------
2 | .00
   (27)
1 8 9
-------------
  11.0.0
   (343)
  1029
-------------
  7.1.|0.0
  (34|62)
  6924
-------------
  176|00
  (346|40)
  00000
-------------
  176.0.0|0.0
  (3464|05)
  173205
-------------
  27975
```

nächst kleinere Quadrat 1, das man von 3 abziehet, und dessen Wurzel 1 man in die Stelle des Quotienten setzt; den Rest vermehrt man mit 2 Nullen oder 00, das ist, man multiplicirt den Rest 2 mit $\frac{1}{100}$, da dann $\frac{200}{100} = 2$ die vorige Zahl ist; aus dem Nenner 100 zieht man in Gedanken die Quadratwurzel aus, = 10; welches der Nenner in dem Quotienten ist, den man aber nicht schreibt, weil man die Nenner in Decimalfractionen hinzuzudenken gewohnt ist; nur wird der Anfang der Brüche durch ein, von der vorhergehenden Zahl abgesondert; den gefundenen Quotienten duplirt man, damit man den Divisor 2 bekomme; man schreibt ihn wie §. 103, nemlich unter die erste Zahl der folgenden Classe, und sagt 2 in 20 ist 7 mal enthalten; zwischen diesem Quotient 7 und dem 1 wird ein, gesetzt, weil mit 7 die Decimalbrüche anfahen, und es eigentlich heißt $\frac{7}{10}$; den Zehler 7 setzt man neben die 2, multiplicirt alles mit 7, und zieht das Product von 200 ab; den Rest dividirt man abermal mit dem duplirten ganzen Quotienten 1, 7 oder $\frac{17}{10}$; der nun als das erste Glied angesehen wird, und fährt wie §. 104. fort, bis man den Fehler unerheblich macht; da dann $\sqrt{3} = 1,73205$ oder = $1,\frac{73205}{100000}$ wenn man den Nenner wirklich setzt, bey nahe seyn wird.

§. 106.

§ 106. Anmerk. Wenn man die gefundene Wurzel mit sich selbst multiplicirt, und was übrig geblieben, zum Product addirt, so muß die gegebene Zahl wieder herauskommen. Diese Operation nennt man die Probe der Quadratrechnung.

Von Ausziehung der Cubicwurzel in Zahlen.

§. 107. Lehrsatz. Aus der Wurzeltafel ist klar, daß keine Cubiczahl von 1 bis 9 über drey Zahlzeichen enthält, wohl aber weniger; folglich muß man eine gegebene Zahl, woraus man die Cubicwurzel ausziehen solle, in solche Classen von der Rechten zur Linken eintheilen, deren jede drey Zahlzeichen bekommt, die äusserste zur Linken aber auch zwey oder eins haben kann. §. 100. Von der äussersten Classe zur Linken zieht man den entweder gleichen oder nächst kleineren Cubus ab, und setzt seine Wurzel in die Stelle des Quotienten; dieses Quotienten Quadrat triplirt man, und dividirt hernach den Rest der Zahl dergestalt damit, daß man das letzte Zahlzeichen des Divisors unter das erste Zahlzeichen der folgenden Classe schreibe, in welchem Fall man das zweyte Glied der Wurzel bekommen wird. Diesen neuen Quotienten multiplicirt man in den Divisor, und schreibt die letzte Zahlzeichen des Products unter das erste Zahlzeichen der folgenden Classe; hernach multiplicirt man das Quadrat des neuen Quotienten mit dem vorhergehenden Glied des Quotienten, triplirt das Product, und schreibt sein letztes Zahlzeichen unter das zweyte Zahlzeichen der schon genannten Classe, und sodann weiter gegen die Rechte; endlich cubirt man den neuen Quotienten,

ten, und schreibt sein letztes Zahlzeichen unter das letzte Zahlzeichen der gegebenen Classe; die Partialproducte addirt man zusammen, und subtrahirt sie von der obenstehenden Zahl, die man dividirt hat. Den Rest dividirt man von neuem, und sieht den ganzen Quotienten nunmehro als das erste Glied an, das man quadrirt und triplirt, welches Product den neuen Divisor gibt, u. s. w. bis entweder alles aufgeht, oder bis man, wenn in der letzten Classe noch was übrig bleibt, durch je drey und drey angehängte Nullen, weil nemlich hier drey Zahlzeichen in die Classe gehören, dem wahren Wehrt der Wurzel in Decimalbrüchen sich so nähert, daß der Fehler endlich unmerklich wird. Der Beweis erhellet aus §. 97—99.

§. 108. Anmerk. Wir wollen die Sache durch einige Exempel erläutern. Man verlangt die Cubicwurzel aus 47437928, welche man genau geben kann, ohne daß man nöthig hätte, Nullen anzuhängen; man setze also die Zahl hin, und theile sie von der Rechten zur Linken in ihre Classen ein nach §. 107. von der äussersten Classe zur Linken ziehe man den nächst kleinern Cubus 27 ab, und setze seine Cubicwurzel 3 in die Stelle des Quotienten. Man quadrire den Quotienten 3, so hat man 9, dieses Quadrat triplire man, so hat man 27, den neuen Divisor, dessen letztes Zahlzeichen man unter das erste der herabgesetzten folgenden Classe setzt; man schließt ihn in ( ) ein, damit man bey

47	437	928	362
27			
201437			

Divisor $3a^2$ = (27)..

Partialproducte:
$3a^2b$ = 162.
$3ab^2$ = 324.
b^3 = 216

ihre Summe 19656

Rest 781928

Neue Divisor $3a^2$ = (3888)..
$100a = 36$.

Partialproducte:
$3a^2b$ = 7776..
$3ab^2$ = 432.
b^2 = 8

ihre Summe 781928

Rest. 0.

Ad-

Addirung der Partialproducte alle Verwirrung vermeide; nun dividirt man wirklich; 2 in 20 ist wegen der folgenden 7 und den vielen abzuziehenden Partialproducten nur 6 mal enthalten, mit diesem neuen Quotienten multiplicirt man den Divisor, so hat man das erste Partialproduct, nemlich das dreyfache Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweyten = 3a 2b = 162; man setzt es so, daß das letzte Zahlzeichen 2 unter den 7 oder 4. das erste der folgenden Classe zu stehen kommt; hernach quadrirt man den neuen Quotienten 6, multiplicirt ihn mit dem vorhergehenden Glied 3, und triplirt das Product, so hat man 3ab2 = 324; das letzte Zahlzeichen wird unter das mittlere der obigen Classe, nemlich gerade unter 3 geschrieben; endlich cubirt man den neuen Quotienten 6; da im Wurzeltäfelein 6.6.6 = 216, so hat man b3; man schreibt sein letztes Zahlzeichen unter das letzte der gegebenen Classe; addirt alle Partialproducte zusammen; subtrahirt die Summe von den obern dividirten Zahlen 20437, und dividirt den Rest 781 mit der folgenden herabgesetzten Classe, also 781928, auf die nemliche Weise, wenn man nur merkt, daß nun a oder das erste Glied der ganze Quotient 36, folglich $a^2 = 36.36$ und $3a^2 = 3.36.36 =$ 3888, welchen neuen Divisor man so unterschreibt, daß sein letztes Zahlzeichen unter das erste der herabgesetzten folgenden Classe zu stehen kommt; worauf man wie bey der ersten Operation fortfährt.

§. 109. Anmerk. Wenn man die Wurzel nicht genau finden kann, so sucht man sie durch Näherung, und hängt, so vielmal man will, je drey und drey Nullen der gegebenen Zahl an, da man dann wie §. 108. zu werke geht. z. E. die Cubicwurzel aus 67 soll gefunden werden; man setzt die Zahl hin, und zieht den nächst kleinern Cubus 64 von ihr ab, die Wurzel dieses Cubus, 4 kommt in die Stelle des Quotienten. Den Rest 3 vermehrt man mit drey Nullen, oder eigentlich zu reden, multiplicirt ihn mit $\frac{1000}{1000}$; welches schon Decimalbrüche gibt; nemlich die Wurzel des Nenners ist 10, weil 10.10.10 = 1000; die Wurzel des Zehlers sucht man indem das erste Glied 4 quadrirt und hernach triplirt 3.4.4 = 48 zum Divisor wird, den man untersetzt wie §. 108. 4 in 3 ist 0 mal enthalten, also geben die Partialproducte lauter Nullen; folg-

67 | 4,061
64 | ——
3 | 000
(4 | 8)
0 | 000
——— | 0.0.0
3.000

3a2 =	(4800). .
3a2b =	28800. .
3ab2 =	4320.
b3 =	216
Summe =	2923416
Rest. =	76584,000
3a2 =	(49450|8). .
3a2b =	494508. .
3ab2 =	1218
b3 =	1
Summe =	49462981
Rest =	27121019 u. s. w.

folglich bleibt die obige Zahl im Rest, daran man abermal drey Nullen hängt; man sucht den neuen Divisor, indem man $\frac{1}{1}\frac{0}{0}$ oder 40 für das erste Glied ansieht, es quadrirt und triplirt, um den Divisor zu bekommen, den man wie §. 108. untersetzt; er ist nemlich 4800; die letzte Null wird unter die erste Null der neuen Classe geschrieben; hernach dividirt man wirklich; 4 in 30 ist 6 mal enthalten, (wegen der folgenden 8 und wegen abzuziehenden Partialproducte). Die Partialproducte sucht man wie §. 108. und fährt fort, so lang man will

§. 110. Zusatz. Weil das Quadrat und Cubus, und überhaupt die Potenz eines wahren Bruchs, er mag eigentlich oder uneigentlich seyn, niemal eine ganze Zahl wird, wie im zweyten Hauptstück von den Irrational- oder surdischen Grösen gezeigt werden solle, so kann die Wurzel durch Näherung niemalen ganz und vollkommen gefunden werden; dann man müßte ohne Ende fortrechnen.

§. 111. Zusatz. Wenn man die Cubicwurzel wieder cubirt, das ist, dreymal mit sich selbst multiplicirt, und den Rest zum Product addirt, so muß die gegebene Zahl wieder herauskommen; das ist die Probe der Cubicrechnung.

§. 112. Anmerk. Man könnte noch weitere Wurzeln arithmetisch ausziehen: gemeiniglich aber läßt man es bey diesen zwo Gattungen bewenden. Zum Beweis, daß alles auf einerley Manier geschehe, will ich ein Exempel von der Biquadratrechnung geben; man solle aus 4236789 die Biquadratwurzel ausziehen; weil keine Biquadrat von 1 bis 9 aus mehr als 4 Ziffern besteht, wohl aber auch weniger haben kann nach §. 99. so wird die Zahl in solche Classen getheilt, davon jede vier Ziffer hat, die letzte zur Linken aber auch weniger haben darf; von der äussersten Classe zur Linken zieht man das gleiche oder nächst kleinere Biquadrat ab, und setzt die Wurzel in die Stelle des Quotienten. Diesen Quotienten cubirt man, und nimmt sein vierfaches, welches der neue Divisor ist; den gefundenen Quotienten multiplicirt man mit dem Divisor, und fängt das Product an zu schreiben unter die erste Ziffer der folgenden Classe; man multiplicirt hernach die Quadrate der beeden gefundenen Glieder, nemlich des ersten und neuen Quotienten mit einander, und schreibt ihr sechsfaches Product so, daß unter die nächste Ziffer der herabgesetzten Classe die letzte

letzte Ziffer dieses sechsfachen Products geschrieben wird; hernach cubirt man den neuen Quotienten, multiplicirt ihn mit den vorhergehenden, und nimmt das Quadrat vierfach, das man eine Stelle weiter zur Rechten zu schreiben anfängt; in der letzten Stelle zur Rechten der Classe fängt man noch das Biquadrat des neuen Quotienten von hinten zu schreiben an, addirt die Partialproducte zusammen, zieht die Summe von der ersten Zahl ab, und dividirt abermal den mit einer neuen Classe vermehrten Rest auf eben diese Art, da man wie bey der Quadrat- und Cubicrechnung den ganzen Quotienten, oder das erste und zweyte Glied für eines annimmt und es = a setzt. Der Grund von dieser Rechnung ist der allgemeine Ausdruck eines Biquadrats $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Von den Verhältnissen in Zahlen.

§. 113. Anmerk. Die Lehre von den Verhältnissen ist die Seele der ganzen Mathematik; hier kann sie noch nicht so gründlich als im folgenden Hauptstück, dahin sie eigentlich gehöret, vorgetragen werden. Wir verweisen also den Leser um so eher dahin, als die practische Rechenkunst, worinnen diese Lehre vorzüglich genutzet wird, erst das dritte Hauptstück ausmacht, folglich im gegenwärtigen Hauptstück noch keine ausführliche Erklärung nöthig hat. Inzwischen wollen wir nur was weniges in Rücksicht auf die Zahlen hier vortragen

§. 114. Erklär. Wenn zwo Zahlen so mit einander verglichen werden, daß die Quotienten in beeden gleich sind, so stehen die vier Zahlen in einer (geometrischen) **Proportion**, welche man in der gemeinen Arithmetik eigentlich zu wissen nöthig hat. Man schreibt sie durch die Divisionszeichen, welche die natürlichste Art sie auszudrucken ist; z. E. 3 : 6 = 4 : 8; 3 in 6 ist 2 mal enthalten, und 4 in 8 auch zweymal; wenn das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so heißt die Proportion continuirlich 3 : 6 = 6 : 12.

§. 115. Zusatz. Man kann also die Proportion auch durch die Multiplication der Quotienten in das 2 und dritte Glied schreiben: z. E. 3 : 2 . 3 = 4 : 2 . 4; 3 : 2 . 3 = 2 . 3 : 2 . 2 . 3.

§. 116.

§. 116. Lehrsatz. Aus drey gegebenen Zahlen läßt sich allemal die vierte Proportionalzahl finden, wenn man das Product des zweyten und dritten Glieds mit dem ersten dividirt; weil nach §. 115. allemal $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 2.4$, oder wenn a das erste Glied, m der Exponent, b das dritte; $\frac{mab}{a} = mb$; und wie §. 114. $a : ma = b : mb$.

§. 117. Zusatz. In der continuirlichen Proportion wird das Quadrat des zweyten Glieds durch das erste dividirt, das letzte geben.

§. 118. Zusatz Durch die Versetzung kann man ein jedes der vier Glieder zum vierten machen, folglich was man für eines von den vier Gliedern suchen will, finden.

§. 119. Lehrsatz. Das mittlere Glied in einer continuirlichen Proportion wird gefunden, wenn man aus dem Product der beeden äussersten die Quadratwurzel extrahirt; denn weil $a : ma = ma : m^2a$ so ist das Product der beeden äussersten m^2a^2, folglich seine Quadratwurzel ma dem mittlern Glied gleich. Oder in Zahlen $3 : 6 = 6 : 12$ folgl. $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$.

§. 120. Anmerk. Diß ist das Fundament von der Regel de Tri, und allen übrigen darauf sich gründenden Regeln der practischen Arithmetik, davon wir im dritten Hauptstück handeln werden, wenn wir vorher in dem nun folgenden Hauptstück von der Buchstabenrechnung neben andern wichtigen Lehren auch die Lehre von den Verhältnissen ausführlich werden vorgetragen haben.

Zweytes Hauptstück
von der
Buchstabenrechnung.

§. 121.
Erklärung.

Die Buchstabenrechnung drückt die Grösen durch allgemeine Zeichen aus, und lehret, wie man mit diesem allgemeinen Zeichen rechnen, das ist, aus gegebenen Grösen andere unbekannte suchen solle. Man heißt sie Buchstabenrechnung, weil die allgemeine Zeichen der Grösen die wirkliche Buchstaben des lateinischen besonders kleinern, auch zuweilen, wenn man viel schickliche Zeichen braucht, des griechischen und teutschen Alphabeths u. s. w. sind. Wir werden die Lehre davon nach dem Plan des vorigen Hauptstücks ausführen, und dahero zuerst von der Geschichte dieser Rechnung was sagen.

Die Geschichte der Buchstabenrechnung.

§. 122. Es ist ein gemeines Vorurtheil, daß man sich entweder vor der Buchstabenrechnung fürchtet, weil man sie für die ganze Algebra hält: oder auch, daß man sich was darauf einbildet, und

schon für einen vollkommenen Algebraisten ausgibt, wenn man diese Rechnung versteht. Die Geschichte davon wird das Vorurtheil heben, und den Anfänger beherzt machen, etwas mit einer nur halbjährigen Aufmerksamkeit zu leruen, wodurch er in den Stand gesetzt wird, manche wegen der darinn angebrachten Buchstabenrechnung für tiefsinnig gehaltene Werke unseres Jahrhunderts nicht nur lesen, sondern auch selbst schreiben zu können, wenn es nöthig wäre, und wenn man an solchen Büchern einen Mangel haben sollte.

§. 123. Unter den Alten wird insgemein der **Diophantus** zuerst genannt, welcher in seinen Libris arithmeticorum die Anweisung gegeben, wie man unbestimmte und bestimmte Aufgaben in Zahlen durch eine Art von Gleichungen auflösen solle. Er trug diese Lehre in der Arithmetik vor, sie gehört also auch nach den Einsichten der Alten dahin. Und daß Diophantus unter den einsichtsvollen Alten einen entscheidenden Rang behaupte, wird niemand läugnen. Er lebte in der Mitte des zweyten Jahrhunderts unter den Antoninen, und war einer der größten Mathematiker zu Alexandrien. Seine gegebene Anweisung heißt noch jetzo die Ars Diophantea. Sie bestehet aus 13 Büchern, davon aber nur noch sechs vorhanden sind, welche **Xylander** im Jahr 1575 lateinisch übersetzt zuerst in öffentlichen Druck gab; die nachfolgende Ausgabe des **Caspar Bachet** vom Jahr 1621 ist ungleich besser, weil der griechische Text nicht nur beygedruckt, sondern auch richtiger erklärt ist.

§. 124.

§. 124. Vielleicht würde dieser Name der Diophanteischen Kunst so gemein als der Name Algebra seyn, wenn man nicht, ehe noch die Schriften des Diophantus wieder bekannt wurden, von den Arabern eine Art von Rechenkunst erhalten hätte, welche mit der oben genannten übereinkommt, und nur durch ihren arabischen Namen sich unterscheidet.

§. 125. Anmerk. Eigentlich ist die Algebra eine Regel aus der Rechenkunst, wie z. E. die Regel de Tri, die Regel Quinque, die Regula Falsi, Coeci u. s. w. worzu noch die Dignitäten und Potenzen kamen, welche man die Cossische Rechnung nannte, und worauf sich unsere alte teutsche Rechenmeister gut verstunden, unerachtet sie zu lernen ungleich schwerer war, als die heutige Algebra; wir wollen nur etwas von den Kunstwörtern und Zeichen der Cossisten sagen. Die erste Dignität hiesse nach der arabischen Benennung Zensus, und wurde geschrieben Z, weil Zensus mit einem Z anfängt; die Wurzel daraus druckte man durch R. aus. Die dritte Dignität oder der Cubus hieß C, und die Wurzel RC. Die vierte Dignität hieß Zensizensus, und wurde geschrieben ZZ; die fünfte Surdesolidum, und geschrieben Sz; die sechste Zensicubus, ZC; die siebende Bissurdesolidum, Bß. Die achte Zenzizensizensus, ZZZ. Die neunte Cubicubus, CC; die zehente Zensisurde olidum, Zßß, u. s. w. welche Namen und Ausdrücke ungleich schwerer zu behalten sind, als die heutzutag übliche; doch muß man sie wissen, wenn man die Schriften der cossischen oder überhaupt algebraischen Bücher lesen und verstehen will, die vor dem Vieta und Carteſius herausgekommen sind. Die erste algebraische Schriftsteller dieser Art, wie sie von den Arabern gebildet wurden, waren Lucas Paciolus, oder nach dem Ordensnamen Lucas de Burgo sancti sepulcri, ein Italiäner, der im Jahr 1494 Summam Arithmeticæ & Geometricæ Proportionumque & proportionalitatum herausgegeben, und im 8 Buch die Algebra nach der Lehrart der Araber doch nur kurz vorgetragen hat. Unter den teutschen Rechenmeistern folgten Adam Riese, und Michael Stiefel, welcher letzterer in seiner Arithmetica integra und deren dritten Buch, die Algebra als ein Stück der Arithmetik abgehandelt hat. Sie sind aber in ihren Auflösungen nicht weiter als auf die quadratische Gleichungen gekommen; bis endlich Scipio Ferreus und Cardanus, in Arte magna, quam vulgo Coſſam vocant, 1545 Regeln für cubische Gleichungen gefunden haben u. s. w. ehe noch die neuere Algebra aufkam.

§. 126. Endlich bekam die Algebra eine neue Gestalt, welche nach und nach immer verschönert wurde, als **Franz Vieta**, einer der größten Mathematiker der französischen Nation, von Fontenai in Poitou gebürtig, gewesener Requetenmeister bey der Königin Margareta, im Jahr 1590 die eigentliche Buchstabenrechnung zuerst erfunden, und statt der Ziffern allgemeine Zeichen, nemlich Buchstaben, und zwar die grösern Buchstaben des Alphabeths eingeführt hatte. Doch war er zu bescheiden, den alten Namen der Algebra mit dem seinigen zu verwechseln, und die Nachkommen haben ihm auch die Ehre nicht angethan, daß sie diese Kunst die Artem Vieteam genannt, und dadurch den arabischen Namen verdrungen hätten. Inzwischen bekam doch die Algebra einen Beynamen, und hiesse seit den Zeiten des **Vieta** Algebra speciosa; andere haben auch synonymische Ausdrücke eingeführt, und sie bald Arithmeticam speciosam, bald universalem, wie **Newton**, bald literalem, oder auch nur Calculum literalem genannt.

§. 127. An dieser Buchstabenrechnung hat man immer verbessert, so viel man konnte; wir wollen aber hier nur die Hauptveränderungen erzehlen. Die erste schreibt sich vom **Thom. Harriot**, einem Engländer, her, welcher statt der grosen Buchstaben kleine eingeführt, und bey der Multiplication die Buchstaben blos ohne Zeichen zusammengesetzt hat; wie solches aus seiner zu London 1631 herausgekommenen Praxi Artis analyticæ erhellet. Die andere Hauptverbesserung hat man dem **Cartesius** zu danken, welcher die Potenzen durch

hinten

hinten angesetzte kleine Ziffern bezeichnet, da er z. E. statt aaa schrieb a^3, und noch überdiß diese Rechnung auf die höhere Geometrie angewandt hat. Die dritte Verbesserung ist dem **Newton** und **Leibniz** zuzuschreiben, von welchen ohnehin die Algebra auf den höchsten Gipfel gebracht worden; in der Buchstabenrechnung haben sie unbestimmte Exponenten eingeführt, und noch überdas die Rechnung des Unendlichen erfunden, davon die Geschichte in einem andern Hauptstück vorkommen wird. Hier merken wir nur dieses an, daß in neuern Zeiten die Buchstabenrechnung zween Haupttheile noch in sich begreift, deren einer Analysis finitorum genannt wird, wenn man aus gegebenen endlichen Grösen andere unbekannte findet; der andere Analysis infinitorum, wenn man aus unendlich kleinen Grösen durch die Differential- und Integralrechnung endliche unbekannte Grösen suchet.

§. 128. Anmerk. Aus dieser kurzen Geschichte wird man doch begreiffen, daß es um die Buchstabenrechnung gar nichts so schweres sey, als man meynt. Die Zahlenrechnnng ist noch schwerer, oder wenigstens mühsamer, wie man aus der Vergleichung bald merken wird, besonders wenn einem das Einmal Eins so beschwerlich zu lernen ist: denn in der Buchstabenrechnung hat man keins. Der arabische Name darf einen eben so wenig schröcken. Unsere zehn Zahlzeichen, die doch Kinder schon wissen, haben wir ja auch von den Arabern erhalten. Der eigentlich arabische Witz in der Algebra besteht etwa in etlich Regeln, wie z. E. die Regel de Tri ist; und diese versteht doch schon ein jeder Kaufmannsjunge. Wem aber diß alles noch nicht genug zur Aufmunterung ist, dem will ich die Worte des Herrn Hofrath Kästners aus der Vorrede zu seiner Mathematik I. Th. anführen, wenn er schreibt: „Die Buchstabenrechnung ist jedem unentbehrlich, der ohne allzugrose Weitläuftigkeit die „nothwendigste Lehren einsehen, und in den Stand kommen will, „sich selbst einigermasen zu helfen. Sollte ja einer zu furchtsam „seyn, so will ich ihm zehn bis zwölf Octavbände und Quartanten weisen, deren Verfasser auf verschiedenen Universitäten

„Teutschlands wegen der darinnen angebrachten Buchstabenrech-
„nung für tiefsinnige Mathematiker, ja gar für Algebraisten ge-
„halten werden, und ich will ihn auf meine Ehre versichern,
„daß ihn ein halbes Jahr in den Stand setzen soll, eben so tief-
„sinnige Werke zu schreiben, wenn er nur einen mittelmäßigen
„Fleiß anwenden will!„

Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchstaben.

§. 129. **Erklärungen.** Die Art mit Zeichen und Buchstaben zu rechnen kann man nicht gründlich verstehen, es sey dann, daß man sich einen deutlichen Begriff von entgegengesetzten Grösen, das ist, von **positiven** und **negativen**, oder bejahenden und verneinenden Grösen bilde. Man heißt nemlich entgegengesetzte Grösen, die in einer solchen Verhältniß gegeneinander betrachtet werden, daß eine die andere vermindert; z. E. Vorwarts und Rückwartsgehen; Vermögen und Schulden; 7 Thl. Vermögen und 4 Thl. Schulden, machen 3 Thl. Vermögen; oder 7 Thl. Schulden und 4 Thl. Vermögen machen 3 Thl. Schulden. Wenn man die Schulden positiv nennt, so ist das Vermögen, als verneinende Schulden, negativ; nennt man aber das Vermögen positiv, so und die Schulden, ein verneinendes Vermögen, negativ: daher es gleichgültig und willkührlich ist, welche man von beeden positiv oder negativ nennet. Die negative haben das Zeichen — und die positive das Zeichen +. Beede aber sind wirkliche Grösen, wie z. E. beedes, Vorwarts und Rückwartsgehen, was wirkliches ist.

§. 130.

§. 130. **Zusatz.** Negative Grösen sind also wahrhaftige Grösen, und der Ausdruck, **weniger als nichts**, schickt sich nicht hieher, es wäre dann daß man das Nichts vorher erklärte, und zeigte daß man kein **absolutes**, sondern nur **respectives** Nichts darunter verstünde.

§. 131. **Anmerk.** Diese kurze Lehre muß man sich vorzüglich bekannt machen, wenn man die ersten Gründe dieser Wissenschaften genau lernen und verstehen will. Man kann die Sache mit Exempeln deutlich genug machen. Wenn man den Zustand, wo man weder vor sich noch rückwarts geht, ein Nichts heißt, so wäre Rückwartsgehen weniger als nichts, woferne man Vorwartsgehen was positives nennt; oder wenn der Zustand, wo einer weder Vermögen noch Schulden hat, ein Nichts genannt wird, so sind Schulden weniger als nichts, wofern man das Vermögen was positives heißt, oder Vermögen weniger als nichts, woferne Schulden positiv genannt würden. Wenn einer 100 Thl. Schulden hat, und bekommt 100. Thl. zu Tilgung seiner Schulden geschenkt, so hat er erst nichts; vorher hatte er also 100 Thl. weniger als dieses respective Nichts. In den geometrischen Wissenschaften wird diese Lehre weiter erläutert. Die Sinus zwischen 180 und 360 Graden sind negativ, unerachtet sie wirkliche Linien sind, die den entgegengesetzten positiven Sinussen gleich sind; die Cosinus über 90° sind negativ u. s. w. oder Linien des Diameters vom Mittelpunkt gegen die rechte Hand genommen, sind positiv, gegen die linke negativ, oder umgekehrt; es sind aber alles wirkliche Grösen. Durch diese Exempel wird unser Vortrag hinlänglich erläutert seyn.

§. 123. **Lehrsatz.** Ungleiche entgegengesetzte, das ist, positive und negative Grösen von einer Art werden addirt, wenn man die kleinere von der grösern abzieht, und dem Rest das Zeichen der grösern gibt; denn das, was einander aufhebt, muß man aufheben, weil es solche Grösen sind, die einander vermindern §. 129. Von der grösern aber, weil sie ungleich sind, wird allemal noch was übrig bleiben, also muß man auch dem Rest das Zeichen der grösern Grösе geben. z. E. $+6-2=4$, $+3-8$

$-8=-5$. Wenn man, was sich gleich gegen einander aufhebt, schnell überschauet, und sodann den Rest mit dem gehörigen Zeichen setzt, so hat man diese Regel nicht so nöthig; wie wir unten in Exempeln zeigen.

§. 133. **Zusatz.** Gleiche entgegengesetzte Grössen heben also einander auf, und werden ein respectives Nichts, weil nichts übrig bleibt, $+3-3=0$.

§. 134. **Zusatz.** Wenn einerley Zeichen vorhanden sind, so ist es vor sich klar, daß man sie schlechthin addirt, mit Beybehaltung des Zeichens. $+3+5=+8$; $-3-2=-5$.

§. 135. **Willk. Satz.** Bey der Buchstabenrechnung wird im Anfang, wenn kein Zeichen vorhanden ist, allemal das Zeichen $+$ verstanden; oder das Zeichen $+$ wird im Anfang der Reyhe von Zahlen und Buchstaben nicht ausgedruckt; wohl aber das Zeichen $-$; wenn es da seyn soll. Eine einzele Grösse wird ohne das Zahlzeichen 1 geschrieben, z. E. $+a$, nicht $+1a$, $-b$, nicht $-1b$.

§. 136. **Zusatz.** Wenn Grösen von verschiedener Art addirt werden sollen, so werden sie blos mit ihren Zeichen zusammen gehängt. Z. E. $2a+3b=2a+3b$.

§. 137. **Lehrsatz.** Man kann also in der Buchstabenrechnung I. wo beederseits einerley Zeichen sind, nach §. 134. II. wenn verschiedene Zeichen $+$ und $-$ untereinander stehen, nach §. 132. 133. III. wenn die Grösen von verschiedener Art sind nach §. 136. die Addition leicht verrichten, wie uns folgende Exempel belehren.

§. 138.

§. 138. Exemp. Weil man nach §. 121. die Grösen mit den kleinen Buchstaben des Alphabeths zu bezeichnen pflegt, so wird man folgende Exempel leicht verstehen. Der I. Fall ist: wenn oben und unten gleiche Zeichen vorkommen.

3a — b + 4f — 3g
2a — 5b + 2f — 2g
5a — 6b + 6f — 5g

3a und 2a geben 5a, — b und — 5b geben — 6b, + 4f und + 2f geben + 6f, — 3g und — 2g geben — 5g; es ist niemlich gleichgültig, ob man vor- oder rückwarts addirt, weil die Buchstaben keinen Werth nach ihren Stellen haben.

II. Fall: wenn verschiedene Zeichen vorkommen; z. E.

6a — 4b + 3f — g
3a + 5b — 8f + g
9a + b — 5f

6a und 3a geben 9a, — 4b + 5b geben + b, denn 4 heben sich gegen 4 auf, und eins mit dem Zeichen + bleibt noch übrig, (oder 4b von 5b läßt b, und zwar + b, weil die grösere Zahl 5b das Zeichen + hat.) Ferner + 3f — 8f lassen noch — 5f, denn + 3f gegen — 3f heben sich auf; folglich setzt man von — 8f nur noch — 5f (oder 3f von 8f lassen 5f, mit dem Zeichen —, weil die grösere Zahl 8f dieses Zeichen hat;) endlich + g — g heben sich auf; folglich ist die Summe 9a + b — 5f. Bey diesem Fall kann es auch geschehen, daß mehrere Reyhen als zween unter einander gesetzt werden; z. E.

3a — 6b + f
2a + 3b — 3f
— a — 2b + 4f
4a — 5b + 2f

3a + 2a gibt 5a, — 6b und — 2b gibt — 8b, und + 3b läßt — 5b, + f + 4f gibt 5f, und — 3f läßt + 2f; in welchem Fall man entweder die gleich bezeichnete zuerst zusammen zehlt, und hernach die obige Regel bey verschiedenen Zeichen anwendet, oder wenn man im Zehlen geübt ist, nur sogleich was sich gegen einander aufhebt, wirklich aufhebt, und die Reste mit ihren gehörigen Zeichen setzt.

III. Fall: wenn verschiedene Buchstaben, das ist, Grösen, die nicht von einer Art sind, vorkommen, so werden sie blos mit ihren Zeichen zusammen gesetzt, wie folgendes Exempel ausweißt; wir wollen noch ein Exempel geben, wo alle Fälle vorkommen, und hernach die Regel auf genannte Zahlen anwenden, damit man sehe, daß sie allgemein und natürlich sey; denn wenn einer gut addiren kann, so kann er sogleich auch subtrahiren.

2a — b + 3g
4a + 2b — h
6a + b + 3g — h.

$$\begin{array}{r} a - 3bg + f - 4h - cd \\ \underline{2a - 2bg - 3f + 3h - 4cd + g} \\ 3a - 5bg - 2f - h - 5cd + g. \end{array}$$

Oder in genannten Zahlen:

6 Thl. − 20 gr. + 3 pf.	4 fl. + 30 kr. − 2 hl.
2 Thl. + 22 gr. − 5 pf.	3 fl. − 50 kr. + 5 hl.
8 Thl. + 2 gr. − 2 pf.	7 fl. − 20 kr. + 3 hl.

§. 139. **Lehrsatz.** Wenn man entgegengesetzte Grösen von einander subtrahirt, so darf man blos alle Zeichen der zu subtrahirenden Zahl mit den entgegengesetzten, das ist + mit — und — mit + verwechseln, und hernach addiren, die Summe wird die Differenz seyn. Denn entweder hat die zu subtrahirende Grösе das Zeichen + oder sie hat das Zeichen —; Ist jenes, so ist klar, daß durch die Subtraction aus **plus minus** werden müsse; denn wenn man + 3 von 8 subtrahirt, so hat man 8 — 3; Hat aber die abzuziehende Grösе das Zeichen **minus**, so muß + daraus werden; denn wenn die positive Grösе ihr Zeichen in das Zeichen der negativen bey der Subtraction verwandelt, so muß kraft des unmittelbaren Gegensatzes die negative ihr Zeichen in das Zeichen der positiven verwandeln.

§. 140. **Zusatz.** Wenn eine Grösе, davon eine andere Grösе abgezogen werden soll, von einer dritten subtrahirt wird, so wird die erste subtrahirte und die andere addirt; weil eben diese zweyte zuviel abgezogen worden, wenn man die erste ganz subtrahirt hat. z. E. Wenn ich von 9 subtrahire 8 — 4 so kommt heraus $9 - 8 + 4 = 5$; denn wenn man 8 ganz subtrahirt, so kommt heraus 1, ich soll aber nur 8 — 4 subtrahiren, folglich muß ich 4 wie-

der

der addiren. Die zu subtrahirende Grösse wird in eine ( ) eingeschlossen, z. E. $7-(5-4)=7-5+4=6$; $10--(3--1)=10-3+1=8$.

§. 141. Exemp. Man wird also leicht subtrahiren können, wenn man addiren kann. Wir wollen etliche Exempel geben: man verändert nemlich blos die Zeichen der zu subtrahirenden Zahl; 2a hat kein Zeichen, man versteht also das Zeichen +, nach §. 135. folglich setzt man darunter −, b hat +, man setzt darunter −, 3g hat −, man setzt dafür +, f hat −, man setzt +; diese unten geschriebene Zeichen werden beobachtet, und nach denselben beede Reyhen addirt, so ist die letzte Reyhe die Differenz. Eben so wird folgendes Exempel berechnet.

$$\begin{array}{rrrr} 3a & -b & +4g & -f \\ 2a & +b & -3g & -f \\ - & - & + & + \\ \hline 5a & -2b & +7g & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 5a & -3b & +f & -9h & +8 & \\ 2a & +3b & +f & -8h & -8 & +g \\ - & - & - & + & + & - \\ \hline 3a & -6b & & -h & +16 & -g \end{array}$$

§. 142. Willk. Satz. Die Producte in der Buchstabenrechnung werden durch Zusammensetzung der Buchstaben ausgedruckt, ohne weitere Zeichen. z. E. a . b heißt ab, ein Ausdruck für alle mögliche Producte; a . b . d = abd. Wenn ein Buchstabe oder eine Grösse mit sich selbst ein- oder mehrmalen multiplicirt wird, so hängt man am Ende eine Zahl oberhalb des Buchstabens, welche anzeigt, wie oft er mit sich selbst multiplicirt worden; z. E. für aa schreibt man a^2, für aaa, a^3, für bbbb, b^4 u. s. w.

§. 143. Lehrsatz. Die Multiplication mit entgegengesetzten Grösen beruhet auf einer kurzen Regel, welche also heißt: Einerley Zeichen geben plus, verschiedene geben minus. Denn entweder sind die Zeichen verschieden, oder einerley; sind sie verschieden, so ist klar, daß das Product negativ wer-

werden muß; das ist, $+4.-3=-3.4$, und $-3.+4=-4.3$. weil nach §. 18. -3 in -12 so oft enthalten seyn muß als $+1$ in $+4$. Sind aber die Zeichen einerley, so ist das Product positiv; welches bey zween positiven Factoren klar genug ist, denn $+3.+4=+12$; aber eben so klar wird es auch bey negativen, wenn man nur bedenkt, daß der eine Factor so oft im Product enthalten seyn muß, als die Einheit im andern Factor enthalten ist. Es steckt aber nicht die positive Einheit oder $+1$, sondern das Gegentheil der $+1$ in dem einen negativen Factor; also muß auch das Gegentheil des andern negativen Factors, das ist $+$ im Product stecken; folglich muß das Product das Zeichen **plus** haben. z. E. $-3.-4=+12$; weil das Gegentheil von $+1$, das ist -1 in -3 dreymal steckt, folglich auch das Gegentheil der -4, das ist $+4$ in 12 dreymal stecken muß, welches nicht geschehen könnte, wenn 12 negativ wäre.

§. 144. Anmerk. Diesen Beweis hat Herr Prof. Kästner gegeben, und ich erinnere mich nicht, ihn irgendwo sonsten gelesen zu haben. Man hat auch einen Beweis per indirectum aus der Geometrie, den man sonsten zur Erläuterung beybringt. Wenn die ganze Seite eines Rectanguli (Fig. I.) in die Länge a und in die Breite c heißt, und es werden zwey kleinere Parallelogramme abgeschnitten, davon die Seiten des einen b des andern d sind; und man verlangt das Rectangulum ABCD, so wird es $(a-b).(c-d)=ac-bc-cd+db$; nemlich das kleine Rectangulum $CE=db$ ist wieder bey bc und cd abgezogen worden, also einmal zuviel, man muß es also wieder addiren, folglich wird $-b.-d=+db$ wie unter andern auch aus §. 140. erhellt.

§. 145. Anmerk. Wir haben die Regeln der Multiplication erwiesen, dahero noch übrig ist, daß wir sie mit Exempeln erläutern. Es gibt zween Fälle; denn entweder bestehet der Multiplicator nur aus einem Buchstaben oder Zahlzeichen, oder aus mehreren, die durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbunden sind. Der erste Fall ist leicht; wenn man nur die Regeln beobachtet;

a — x

a — x	a — b + 3d	a . x ist ax, + x mit — x ist — xx; ferner + a mit — b ist — ab, — b mit — b ist + bb u. s. w.
x	— b	
ax — xx	— ab + bb — 3db;	

Der II. Fall, wenn beede Factores aus mehr Buchstaben bestehen, sie mögen einerley oder verschieden seyn.

1. Ex. $a + b$ / $a + b$

$aa + ab$ / $+ ab + bb$

$aa + 2ab + bb$

oder $a^2 + 2ab + b^2$

Zuerst multiplicirt man die obige Reyhe ganz mit a, a . a = aa, a . b = ab; hernach mit b, b . a = ab, man schreibt es unter den ersten Reyhen, um die Addition zu erleichtern, (man könnte es auch in gerader Linie fortschreiben) ferner b . b = bb; diese zwey Partialproducte addire man zusammen, da dann die erste Reyhe aa + 2ab + bb, oder nach §. 142. die zweyte Reyhe a^2 u. s. w. herauskommt, welches der allgemeine Ausdruck aller Quadratzahlen ist. Weil überall die Zeichen + vorkommen, so hat das Product auch diese Zeichen. Im 2. Ex. wird abermal die erste Reyhe ganz mit a hernach mit — b multiplicirt; a . a = aa, a . — b = — ab; ferner — b . + a = — ab, und — b . — b = + bb. Abermal ein vollkommen Quadrat, wo die Wurzel a — b ist. Im dritten Exempel wird die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt; das Product ist die Differenz der Quadrate. Denn a . a = aa, a . — b = — ab, ferner + b . + a = + ab, + b . — b = — bb; wenn man nun die Partialproducte addirt, so heben sich — ab und + ab auf, und der Rest aa — bb gibt das verlangte Product.

2. Ex. $a - b$ / $a - b$

$aa - ab$ / $- ab + bb$

$aa - 2ab + bb$

oder $a^2 - 2ab + b^2$

3. Ex. $a - b$ / $a + b$

$aa - ab$ / $+ ab - bb$

$aa - bb$

§. 146. Zusatz. (a + b) (a + b) oder (a + b) (a — b) gibt immer ein Quadrat, und man kann für $a^2 + 2ab + b^2$ den ersten, und für $a^2 - 2ab + b^2$ den zweyten Wehrt und umgekehrt setzen.

§. 147.

§. 147. **Zusatz.** Wenn in der Rechnung $a^2 - b^2$ vorkommt, so kann man jedesmal $(a-b)$. $(a+b)$ dafür setzen, und auch umgekehrt; wie es die Schicklichkeit erfordert.

§. 148. **Zusatz.** Für den Ausdruck $ax - xx$ läßt sich $(a-x)x$ und umgekehrt, wie auch für $x - xx$ der Ausdruck $(1-x)x$ setzen; denn wenn man wirklich multiplicirt, so kommt $x - xx$ heraus.

§. 149. **Anmerk.** Diese Zusätze hat man deßwegen sich bekannt zu machen, weil es gar oft zu geschehen pflegt, daß man durch die Zerfällung des Products in seine Factores in der Buchstabenrechnung manche Vortheile erhält, die man sonst vergeblich sucht; man muß dahero eine Fertigkeit in schneller Erfindung der Factorum zu bekommen suchen.

§. 150. **Willk. Satz.** In der Division werden die Buchstaben, die durch die Multiplication verbunden sind, wieder getrennet, wofern der Divisor einerley mit einem oder dem andern Factor des Dividendus ist; z. E. $\frac{ab}{a} = b$, dann a in a ist einmal enthalten, folglich kommt in den Quotienten b; $\frac{abc}{bc} = a$, $ag : a = g$ u. s. w. sind aber Divisor und Dividendus ganz verschieden, so wird die Division entweder blos angezeigt, z. E. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $g : a$; oder wie wir unten zeigen werden, wird der Quotient in einer unendlichen Reyhe von Brüchen durch Näherung gesucht, wenn der Divisor zusammengesetzt ist, z. E. $\frac{a}{b+c}$ oder $\frac{a}{b-c}$.

§. 151. **Lehrsatz.** Die Regel der Division in Rücksicht auf die Zeichen, ist eben dieselbe, die

bey

bey der Multiplication statt hatte; nemlich einerley Zeichen geben plus, verschiedene geben minus. Der Beweis ist der nemliche, den wir bey der Multiplication gegeben haben §. 143.

§. 152. Die Sache wird sich durch Exempel erläutern lassen: es gibt zween Fälle, wenn die Grösen einer Art sind; der Divisor besteht entweder aus einem oder aus mehr durch + und — verbundenen Buchstaben. Das einzele kann auch ein Product, z. E. ab seyn. I. Fall, wenn der Divisor einzeln ist: man dividirt wie in den Zahlen unter sich, und sagt, a in ab ist b mal enthalten; der Quotient bekommt b; mit dem Quotienten wird der Divisor a multiplicirt, a . b ist ab, dieses Product von dem Dividendus subtrahirt, läßt - ac, das man herab sezt; der Divisor wird wieder unterschrieben. + a in - ac ist - c mal enthalten, weil verschiedene Zeichen - geben; der Quotient bekommt also - c, dieser Quotient wird mit dem Divisor multiplicirt, - c . + a gibt - ac, das Product von dem Dividendus abgezogen läßt + ad; der Divisor a wird wieder unterschrieben; a in ad gibt + d, weil es einerley Zeichen sind; a . d = ad, diß von dem Dividendo subtrahirt läßt nichts, also hat man den Quotienten genau gefunden.

```
ab - ac + ad } b - c + d
(a)
ab
-------
   - ac + ad
      (a)
   - ac
-------
      + ad
        (a)
        ad
```

II. Fall. Wenn der Divisor nicht einzel ist, da es abermal wie in der obigen Division heißt, a in aa ist enthalten a mal; der Quotient bekommt a; mit diesem Quotienten wird der ganze Divisor multiplicirt, a . a = aa, und + a . + b = + ab, das Product aa + ab wird wieder von dem Dividendus subtrahirt, man verwechselt also die Zeichen nach §. 139. und addirt, - aa + aa heben sich auf, - ab und - bb bleiben übrig; dieser Rest wird wieder durch a + b dividirt, a - ab ist - b mal enthalten, - b . + a ist - ab; - b . + b ist - bb, diß Product vom Dividendo abgezogen geht auf, und läßt nichts.

```
aa - bb } a - b
(a+b)
aa + ab
-------
   - ab - bb
      (a + b)
   - ab - bb
-------
      •
```

aa − bb − 2ac + cc ⌐ a + b − c
(a − b − c) ⌙
aa − ab − ac
− + +

+ ab − bb − ac + cc
(a − b − c)
ab − bb − bc
− + +

− ac + bc + cc
(a − b − c)
− ac + bc + cc
0

Eben so wird das andere Exempel gerechnet, a in aa ist enthalten a mal, der Quotient a wird mit dem ganzen Divisor multiplicirt, und gibt das Product aa − ab − ac, dieses von dem Dividendo abgezogen, läßt, wenn die Zeichen verändert werden + ab − bb − ac + cc; der Divisor wird abermal unterschrieben; a in ab, b mal; der Quotient + b mit dem Divisor multiplicirt, gibt das Product ab − bb − bc, diß von dem Dividendus subtrahirt, läßt − ac + bc + cc; der Divisor noch einmal unterschrieben gibt den Quotienten − c, das Product aus − c in den Divisor vom Dividendus abgezogen läßt nichts.

§. 153. **Zusatz.** Aus dem bisherigen wird man also leicht verstehen, wie man eine einzele Gröse durch einen zusammengesetzten Divisor dividiren und den Quotienten durch Näherung bekommen solle; eine Lehre, die besonders zu merken ist, weil sie in der Summirung der Reyhen uns zu statten kommt. z. E. Man solle 1 durch 1 — x dividiren.

1 ⌐ 1 + x + xx + xxx &c.
(1 − x) ⌙
1 − x
− +

+ x
(1 − x)
x − xx
− +

+ xx
(1 − x)
xx − xxx
− +

+ xxx

Da es heißt, 1 in 1 ist enthalten 1 mal; der Quotient 1 multiplicirt in den Divisor 1 − x gibt das Product 1 − x, diß von dem Dividendus abgezogen läßt + x, wenn man die Zeichen verändert und addirt; der Divisor wieder unterschrieben gibt den Quotienten x, denn 1 in x ist x mal enthalten; der Quotient in den Divisor multiplicirt gibt x − xx, diß von dem Dividendus x abgezogen, läßt + xx u. s. w.

Die

Die Buchstabenrechnung in Brüchen.

§. 154. Lehrsatz. Die Brüche werden in der Buchstabenrechnung eben so behandelt, wie in der Zahlenrechnung. Man bringt sie unter einerley Benennung, man addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt nach eben den Regeln, die wir §. 54. folgg. gegeben: denn die daselbst vorgetragene Beweise sind allgemeine Beweise, die also auch insbesondere die Buchstabenrechnung erläutern.

§. 155. Zusatz. Man bringt also Brüche unter einerley Benennung, wie §. 57. Denn $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{g} = \frac{adg}{bdg} + \frac{cbg}{bdg} + \frac{ebd}{bdg}$. Man addirt und subtrahirt sie, wenn man nach geschehener Reduction unter einerley Benennung Zehler zu Zehlern addirt, oder Zehler von Zehlern subtrahirt. z. E. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{a}{d} + \frac{f}{g} = \frac{ag+fd}{dg}$; und $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$.

§. 156. Lehrsatz. Die Multiplication und Division der Brüche befolgt gleichermasen eben die Regeln, die §. 65. und 70. vorkommen.

Der I. Satz ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Bew.

Es sey $\frac{a}{b} = m$ $\frac{c}{d} = n$

$\frac{\quad}{\quad} \cdot b$ $\frac{\quad}{\quad} \cdot d$

$a = bm$ $c = dn$

$c = dn$

$ac = bdmn$

$\frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} : bd$

$\frac{ac}{bd} = mn.$

Der II. Satz $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Bew.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd}$

$\frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = \frac{ad}{cb}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

§. 157. **Zusatz.** Einen Bruch, dessen Nenner zusammengesetzt ist, z. E. $\frac{a}{b+c}$ dividirt man wirklich, wenn man nach §. 152. und 153. die Operation anstellt, und den Quotienten durch Näherung sucht.

$$(b+c)\overline{)\,a}\;\Big\lfloor\;\frac{a}{b}-\frac{ac}{bb}+\frac{acc}{bbb}-\frac{accc}{bbbb}\;\&c.$$

$$\begin{array}{r} a+\frac{ac}{b} \\ -\;-\;b \\ \hline -\;\frac{ac}{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (b+c) \\ -ac-\frac{acc}{b} \\ b\quad bb \\ +\quad + \\ \hline +\frac{acc}{bb} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (b+c) \\ +\frac{acc}{bb}+\frac{accc}{abb} \\ -\quad - \\ \hline -\frac{accc}{bbb} \end{array}$$

Denn b ist in a enthalten $\frac{a}{b}$ mal, der Quotient heißt also $\frac{a}{b}$, dieser Quotient mit $b+c$ multiplicirt, gibt nach §. 67. $\frac{ab}{b}+\frac{ac}{b}$ das ist $a+\frac{ac}{b}$, das Product vom Dividendus subtrahirt, läßt, weil a von a aufgeht, nach Veränderung der Zeichen $\frac{-ac}{b}$; der Divisor wird wieder unterschrieben; b in $-\frac{ac}{b}$ gibt nach §. 72. im Quotienten $-\frac{ac}{bb}$, dieser Quotient mit dem Divisor multiplicirt, gibt das Product $-\frac{acb}{bb}$ $-\frac{acc}{bb}$, das ist $-\frac{ac}{b}-\frac{acc}{bb}$, welches von dem Dividendus $-\frac{ac}{b}$ abgezogen, läßt $+\frac{acc}{bb}$ u. s. w. wo man aufhört, wird der Rest, als ein Bruch, wie in der Division §. 49. zum Quotienten addirt.

§. 158. **Zusatz.** Die obige Reyhe kürzer ausgedruckt ist $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}+\frac{ac^4}{b^5}$ u. s. w.

§. 159.

§. 159. **Zusatz.** Wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$, so ist $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. s. w.

§. 160. **Anmerk.** Dieses aber ist nicht so zu verstehen, als ob eine unendliche Reyhe Nullen $= \frac{1}{2}$ wenn die Anzahl $1 - 1 + 1 - 1$ u. s. w. gleich, oder, wenn sie ungleich ist, $1 = \frac{1}{2}$ wäre: denn sie ist weder gleich noch ungleich; sondern unendlich, das ist, die Division muß immerfort gesetzt werden, oder wenn man abbricht, so muß man den Rest, den man in der Divisionsoperation noch hat, zum Quotienten mit seinem Divisor als einen Bruch addiren, da dann jedesmal herauskommen wird, daß $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Guido Grandus hat sich hierinnen geirret, wenn er aus dieser Operation geschlossen, unendlich viel Nullen geben eine positive Gröse, nemlich $\frac{1}{2}$. Er wollte damit die Schöpfung aus Nichts erklären.

§. 161. **Zusatz.** Wenn $a = 1$ und $c = 1$. und $b = 2$, so ist $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. w.

§. 162. **Lehrsatz.** Woferne man statt des Divisors $b + c$ den Divisor $b - c$ setzt, so ist der Quotient $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5}$ u. s. w. und die Zeichen wechseln nicht wie §. 157. ab. Die Operation ist eben dieselbe: dahero wir sie hier nicht ausführlich wie §. 157. hersetzen.

§. 163. **Zusatz.** Wenn in §. 162. $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$, so ist $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. s. w. also $= \infty$.

§. 164. **Zusatz.** Wenn $a = 1$, und $c = 1$, und $b = 2$, so ist $\frac{1}{2-1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. w.

§. 165. Zusatz. Wenn $a = 1$ und $b = 1$, so ist nach der Reyhe §. 158. der Ausdruck $\frac{1}{1+c}$ oder, wenn man für $c = x$ setzt, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ u. s. w. Ferner wenn b bleibt, oder $= x$ gesetzt, und $c = 1$, so ist $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$; folglich sind die zween Reyhen einander gleich, das ist, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$ u. s. w.

§. 166. Anmerk. Diese Veränderungen der Reyhen sind aus dem, was hier vorgetragen wurde, leicht verständlich; das weitere wird unten vorkommen, wenn wir von Summirung der Reyhen und Progressionen reden werden.

Von den Potenzen oder Dignitäten und ihren Veränderungen.

§. 167. Erklär. Wenn man eine Gröse mehrmalen mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product die **Potenz** oder **Dignität**; oder ein Product aus lauter gleichen Factorn ist eine Potenz, der einfache Factor ist die **Wurzel**, die Menge aller gleichen Factorn heißt der Grad oder der **Exponent** der Potenz, welcher anzeigt, wie vielmal die gegebene Gröse mit sich selbst multiplicirt worden; und dieser Exponent wird mit einer kleinen Ziffer, oberhalb des Factors zur Rechten, geschrieben. Das Product von zween gleichen Factoren heißt ein **Quadrat**, das von dreyen **Cubus**, das von mehrern die 4te, 5te Potenz u. s. w. das Wurzelzeichen ist bekannt. z. E. $5 \cdot 5$ $5 \cdot 5 = 5^4 = 625$; 5^4 ist die Potenz, 5 ist die Wurzel; 4 der Exponent. $6 \cdot 6 = 6^2$, und $6 = \sqrt{6^2}$; $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 = 4^3$, und $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 168.

§. 168. Zusatz. Wenn die Wurzel ein Bruch ist, so ist auch das Quadrat oder die Potenz überhaupt ein Bruch, weil man, wenn ein Bruch mit einem Bruch multiplicirt wird, Zehler mit Zehlern und Nenner mit Nennern multiplicirt, oder $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$, oder überhaupt $\frac{a}{b}$ zur nten Potenz erhoben $= \frac{a^n}{b^n}$.

§. 169. Zusatz. Eben so ist die Wurzel aus einem Bruch wieder ein Bruch, dessen Zehler die Wurzel des Zehlers, und der Nenner die Wurzel des Nenners ist. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$; $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b}$.

§. 170. Zusatz. Das Quadrat eines eigentlichen und auch uneigentlichen Bruchs, der sich durch den Nenner nicht ganz dividiren läßt, ist keine ganze Zahl; denn es sey der Bruch $\frac{u}{x}$ so ist sein Quadrat $\frac{uu}{xx}$; wenn nun dieses Quadrat eine ganze Zahl wäre, z. E. p, so wäre $\frac{uu}{xx} = p$ und $\frac{uu}{x} = px$; folglich müßte $\frac{uu}{x}$ eine ganze Zahl seyn, also u durch x sich dividiren lassen, oder x müßte ein Factor von uu seyn, welches aber kraft der Hypothese nicht seyn kann.

§. 171. Zusatz. Eben so kann auch der Cubus eines solchen Bruchs keine ganze Zahl seyn, u. s. w.

§. 172. Zusatz. Wenn die Potenzen keine ganze Zahlen sind, so sind es auch die Wurzeln nicht.

§. 173. Zusatz. Wenn eine gegebene Wurzel gröser als eine ganze Zahl, aber doch zugleich kleiner als eben die um eins vermehrte ganze Zahl ist, das ist, wenn sie zwischen x und $x + 1$ hineinfällt, und x eine ganze Zahl bedeutet, so gibt es keinen Bruch, der die Wurzel genau ausdruckte, sondern man muß durch die Approximation oder Näherung dem wahren Wehrt, den man nie ganz bekommt, so nahe zu kommen suchen, daß der Fehler unmerklich wird.

§. 174. Anmerk. Man siehet hieraus, warum man bey den angehängten Nullen in Ausziehung der Quadrat- und Cubiczahlen niemalen die Wurzel ganz bekommt. Denn der Zehler ist die Wurzel aus einem eigentlichen Bruch; er kann dahero niemal eine ganze Zahl werden, §. 172. folglich muß man sich der wahren Wurzel nur nähern.

§. 175. Lehrsatz. Man kann die Potenzen addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren. Denn entweder sind sie gleichnahmig, oder nicht; sind sie nicht gleichnahmig, so geschehen die vier Rechnungsarten mit den Zeichen, davon wir schon geredet haben. Denn a^3 zu b^2 addirt ist $a^3 + b^2$, subtrahirt $a^3 - b^2$, multiplicirt $a^3 b^2$, und dividirt $a^3 : b^2$ oder $\frac{a^3}{b^2}$; sind sie aber gleichnahmig, so wird die Addition und Subtraction wie in Zahlen verrichtet; $3a^3 + a^3 = 4a^3$, $3a^3 - a^3 = 2a^3$. Was aber die Multiplication und Division betrifft, so bemerkt man folgende Regeln:

I. Bey der Multiplication der gleichnahmigen Potenzen werden die Exponenten addirt und die Summe ist das Product.

Dann $a^3 . a^2 = aaa . aa$

$aaa . aa = aaaaa$

$aaaaa = a^5$

$a^3 . a^2 = a^5$

wenn man also die Exponenten 3 und 2 addirt, so hat man das Product von $a^3 . a^2 = a^5$.

II. Bey der Division wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividendus subtrahirt, die Differenz ist der Quotient.

Dann $a^5 : a^3 = \frac{aaaaa}{aaa}$

$\frac{aaaaa}{aaa} = aa$

$aa = a^2$

$a^5 : a^3 = a^2$

$a^2 = a^{5-3}$

$a^5 : a^3 = a^{5-3}$

Folglich bekommt man den Quotienten, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus subtrahirt.

§. 176. Zusatz. Wenn die Exponenten allgemeine Zeichen wie *m* und *n* sind, so ist $x^m . x^n = x^{m+n}$ und $x^m : x^n = x^{m-n}$.

§. 177. Zusatz. Eine Gröse, die unverändert bleibt, und nicht mit sich selbst multiplicirt wird, läßt sich also durch x^1 ausdrücken; zuweilen hat man

einen Nutzen, wenn man die 1 setzt, z. E. $x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1$; meistentheils aber läßt man die Einheit weg, und schreibt für x^1 nur x. Das ist x in der ersten Potenz.

§. 178. **Lehrsatz.** Eine Potenz, deren Exponent Null, ist allzeit eins; $x^\circ = 1$; denn

$$x^\circ = x^{1-1}$$

$$x^{1-1} = x^1 : x^1$$

$$x^1 : x^1 = x : x = \frac{x}{x}$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

$x^\circ = 1$.

Die Gröse mag also seyn, was sie für eine will, wenn ihr Exponent $= 0$, so ist sie $= 1$. z. E. $a^\circ = 1$, $b^\circ = 1$, u. s. w. also $1, \frac{x}{x}, x^\circ$ sind einerley Ausdrücke und alle einander gleich.

§. 179. **Zusatz.** Wenn des Divisors Exponent gröser ist als der Exponent des Dividendus, so wird der Exponent des Quotienten negativ; z. E. $x^2 : x^5 = x^{2-5} = x^{-3}$.

§. 180. **Zusatz.** Eine Potenz, die einen negativen Exponenten hat, ist einem Bruch gleich, dessen Zehler eins, und dessen Nenner die nemliche Potenz mit dem positiven Exponenten ist. Denn $x^\circ = 1$ §. 178. folglich $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, und überhaupt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; dahero x^{-n} und $\frac{1}{x^n}$ gleichgültige Ausdrücke sind.

§. 181. Anmerk. Im folgenden werden wir beweisen, daß es auch Dingnitäten gebe, deren Exponenten Brüche sind, welche nach eben diesen Regeln behandelt werden.

§. 182.

§. 182. **Zusatz.** Zusammengesetzte Potenzen werden auf eben diese Weise behandelt, dann $a^2 x^3 . ax = a^3 x^4$, weil $aaxxx . ax = aaaxxxx = a^3x^4$. also $x^n y^m . xy = x^{n+1} y^{m+1}$ und $a^2x^3 : ax = ax^2$.

§. 183. **Zusatz.** Wenn der Exponent unbestimmt ist, so ist aus gleichem Grund $x^n . x^2 = x^{n+2}$ und $x^n . x = x^{n+1}$ und $x^n : x = x^{n-1}$.

§. 184. **Lehrsatz.** Potenzen lassen sich zu höhern Graden erheben, wenn man ihre Exponenten mit dem Exponenten des verlangten Grads multiplicirt; denn a^3 zum vierten Grad erhoben, ist nichts anders als a^3 viermal mit sich selbst multiplicirt, nun aber ist $a^3 . a^3 . a^3 . a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ nach §. 176. Eine Zahl aber etlichmal zu sich selbst addiren, heißt sie multipliciren; folglich darf man nur den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten des verlangten Grads multipliciren, so hat man die gesuchte Potenz. $a^{3 \cdot 4} = a^{12}$ der vierte Grad von a^3.

§. 185. **Zusatz.** Im allgemeinen Ausdruck wird dahero auch seyn der nte Grad von $x^m = x^{mn}$.

§. 186. **Zusatz.** Sind die Potenzen zusammengesetzt, so ist aus gleichem Grunde der dritte Grad von $x^2y^3 = x^6y^9$; und der nte Grad von $x^my^r = x^{mn}y^{nr}$.

§. 187. **Zusatz.** Auch bey negativen Grössen bleibt die Regel: denn x^{-2} im 3ten Grad $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ und z^{-n} im nten Grad ist $x^{-nm} = \frac{1}{x^{nm}}$ nach §. 180.

§. 188. **Lehrsatz.** Die Wurzel aus einer Potenz läßt sich ausziehen, wenn man den Expo-

nenten

nenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt. Dann $\sqrt[3]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^{4.3}}$, wie nun x^{12} entsteht, wenn man x^4 dreymal mit sich selbst multiplicirt, so muß x^4 die Cubicwurzel aus x^{12} wieder herauskommen, wenn man $x^{12} = x^{4.3}$ wieder mit 3 dividirt.

§. 189. **Zusatz.** Allgemein ist daher auch $\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; und bey zusammengesetzten Grösen $\sqrt[3]{x^4y^2} = x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

§. 190. **Zusatz.** Hieraus erhellet zugleich, daß es Potenzen gebe, deren Exponenten Brüche sind; $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$; auch negative, z. E. $\sqrt[7]{x^{-3}} = x^{\frac{-3}{7}}$

§. 191. **Zusatz.** Um eine Wurzel schicklicher auszudrücken, darf man sie nur wie §. 189. folgg. setzen; $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, und $\sqrt[r]{x^{n+m}} = x^{\frac{n+m}{r}}$, und $\sqrt[r]{x^{n+m}} = x^{\frac{n+m}{r}}$ sind gleichgültige Ausdrücke.

§. 192. **Zusatz.** Weil bey zusammengesetzten Grösen $\sqrt[2]{x^3y} = x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ und allgemein $\sqrt[n]{x^my^r} = x^{\frac{m}{n}}y^{\frac{r}{n}}$, so lassen sich solche Wurzeln einfacher ausdrucken, wenn man aus dem einen Factor die Wurzel wirklich ausziehen kann; denn $\sqrt[m]{a^mb} = a^{\frac{m}{m}}b^{\frac{1}{m}} = a^1 . b^{\frac{1}{m}} = a\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[n]{x^nb^r} = x^{\frac{n}{n}}b^{\frac{r}{n}} = x . b^{\frac{r}{n}} = x\sqrt[n]{b^r}$.

§. 193.

§. 193. **Zusatz.** Sind also hinter dem Wurzelzeichen Zahlen, so muß man die Zahl in ihre Factores geschickt und so zerfällen, daß eine ein vollkommenes Quadrat oder Cubus u. s. w. wird, je nachdeme man eine Quadrat- oder Cubicwurzel u. s. w. verlangt. z. E. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = 2\sqrt[3]{6}$.

§. 194. **Lehrsatz.** Man kann verschiedene Wurzelgrösen unter einerley Benennung bringen, und hernach addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, wenn man die Wurzelgrösen als eine Potenz ausdrückt, deren Exponent ein Bruch ist, und hernach die beede Brüche wie §. 155. unter einerley Benennung bringt. Denn $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{y^s}$ bekommen einerley Benennung auf folgende Weise

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}, \quad \sqrt[r]{y^s} = y^{\frac{s}{r}}$$

da nun nach §. 57. $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{nr}{mr}}$, $y^{\frac{s}{r}} = y^{\frac{ms}{mr}}$

so ist folglich $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[mr]{x^{nr}}$ und $\sqrt[r]{y^s} = \sqrt[mr]{y^{ms}}$

das ist, beede Brüche haben einerley Benennung; sie lassen sich daher addiren und subtrahiren durch Zeichen; multipliciren und dividiren durch die wirkliche Multiplication und Division der Grösen hinter dem Wurzelzeichen; dann $\sqrt[mr]{x^{nr}} \cdot \sqrt[mr]{y^{ms}} = \sqrt[mr]{x^{nr} y^{ms}}$; u. s. w.

§. 195. **Zusatz.** In Zahlen gibt es zuweilen schicklichere Ausdrücke nach §. 193. bey der Addition

und Subtraction, $\sqrt{63} + \sqrt{28} = \sqrt{9 \cdot 7} + \sqrt{4 \cdot 7} = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (3+2)\sqrt{7}$.

§. 196. **Zusatz.** Sind vor dem Wurzelzeichen noch Zahlen, so wird bey der Multiplication ihr Product auch in die Wurzelgröse multiplicirt. z. E. $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7} = 3 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 7} = 6\sqrt{14}$. Sind die Wurzelgrösen zusammen gesetzt, so verfährt man wie §. 145.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{9}+\sqrt{6}$$
$$-\sqrt{6}-\sqrt{4}$$
$$\sqrt{9}-\sqrt{4} = 3-2 = 1.$$

Eben so macht man es bey der Division, denn $\frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$.

§. 197. **Anmerk.** Aus der Lehre der Potenzen läßt sich nun die vorgetragene Lehre von Decimal- und Sexagesimalbrüchen allgemein erweisen. Denn ein Decimalbruch kann als eine Potenz der 10 mit einem negativen Exponenten angesehen werden: denn $\frac{1}{1000000} = 10^{-6}$ und $\frac{5}{1000000} = 5 \cdot 10^{-6}$. Oder allgemein $a \cdot 10^{-n}$ und $b \cdot 10^{-m}$; wenn man nun diese zween Brüche mit einander multiplicirt, so heißt das Product nach der Regel, §. 175. $ab \cdot 10^{-n-m}$, und wenn man den ersten durch den andern dividirt, so heißt der Quotient $\frac{a}{b} 10^{-n+m}$; welches die schon vorgetragene Lehre der Decimal- und Sexagesimalrechnung nicht nur erläutert, sondern auch für alle nur mögliche Fälle erweiset.

§. 198. **Lehrsatz.** Man mag die Zahl Zwey zu einer Potenz erheben, zu was für einer man immer will, so wird allemal die Potenz von 2 gröser seyn als der Exponent. Der Exponent sey m, und $m = 1$. so ist vorhin klar, daß, weil $2^1 > 1$ auch $2^m > m$. Nun multiplicire man mit 2.

$$\frac{}{2^m \cdot 2 > 2m} \cdot 2$$

$$2^m \cdot 2 = 2^{m+1} \text{ nach §. 183.}$$

$$\frac{}{2^{m+1} > 2m}$$

so ist multiplicirt man wieder mit 2 so wird abermal 2^{m+2} gröser als der Exponent $m+2$ seyn u. s. w.

Auf diese Weise sieht man schon, daß, wenn der Exponent $m+1000$ würde, doch immer die Potenz $2^{m+1000} > m+1000$.

§. 199. **Lehrsatz.** Eine Gröse a die man immer halbirt, und durch 2 so dividirt, daß man die Hälfte wieder halbirt, und diese Hälfte noch einmal, und so immerfort, kann kleiner werden als eine jede angebliche Gröse, (quavis data vel assignabili minor). Es sey die gegebene kleinste Gröse c, ihr vielfaches mc, so daß durch die Multiplication $mc = a$ werde.

Es ist also I. $a = mc$

$$\frac{}{} : 2^m$$

$$\frac{a}{2^m} = \frac{mc}{2^m}$$

Nun ist ferner nach §. 198.

II. $m < 2^m$ folglich

$$\frac{}{} \cdot c$$

$$mc < 2^m c$$

$$\frac{}{} : 2^m$$

$$\frac{mc}{2^m} < c \quad \text{und nach nr. I.}$$

$$\frac{mc}{2^m} = \frac{a}{2^m}$$

$$\frac{a}{2^m} < c \quad \text{das ist: die Gröse a wird durch } m$$

Hal-

Halbirungen, das ist, durch alle Potenzen von 2 dividirt, zuletzt kleiner als die angebliche kleinste Grösse c.

§. 200. Anmerk. Diesen Beweis hat schon Euclides Elem. X. Prop. I. gegeben, und dadurch die Lehre von dem unendlich Kleinen vorgetragen; Wir haben ihn nur etwas deutlicher zu machen gesucht, so, wie man heutzutag die Deutlichkeit in den mathematischen Schriften verlanget, oder zu verlangen gewohnt ist; er ist von den meisten übergangen worden, weil sie glaubten, der Ausdruck quantitas quavis data minor seye vorhin klar; allein man muß in der Mathematik keinen Satz annehmen, dessen Möglichkeit nicht vorher bewiesen ist. Herr Hofrath Kästner ist, so viel wir wissen, der einige, der diesen I. Satz aus dem X. Elem. des Euclides seinem mathematischen Lesebuch eingerückt hat. Er setzt hinzu: „Dieser Satz ist der wahre Grund der „Schlüsse, die man jezo durch Ausdrückungen des unendlich „Kleinen abzukürzen pflegt. Analys. finit. §. 47. S. 28. III. Th. „der mathem. Anfangsgr.„

§. 201. Zusatz. Jeder eigentliche Bruch, dessen Zehler $= 1$, ist also kleiner als $\frac{1}{2}$, wenn er nicht selbst $\frac{1}{2}$ ist; und alle Potenzen von $\frac{1}{2}$ sind kleiner als $\frac{1}{2}$.

§. 202. Anmerk. Zu einiger Uebung für die Anfänger wollen wir einige Exempel von berechneten Potenzen hie anführen; und zwar

I. Die Multiplication der Potenzen:

$$x^3 \cdot x^n = x^{3+n}; \quad x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{10}+\frac{4}{10}}$$

$$= x^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{x^9}; \quad x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{n}{m}} = x^{\frac{m+2n}{2m}}$$

$$= \sqrt[2m]{x^{m+2n}}; \quad x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{-3}{12}+\frac{4}{12}}$$

$$= x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}.$$

II. Die Division der Potenzen:

$$y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = y^{\frac{6}{8}-\frac{4}{8}} = y^{\frac{2}{8}} = \sqrt[4]{y}.$$

Ferner

Ferner $y^n : y = y^{n-1}$, $y^r : y^6 = y^{r-6}$; $y^{\frac{1}{2}} : y^{-\frac{2}{3}}$
$= y^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = y^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = y^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{y^7} = y\sqrt[6]{y}$.

III. Die Elevation zu Potenzen:

z^3 zur 4 Pot. $= z^{3\cdot4} = z^{12}$; $z^{\frac{1}{3}}$ zur 5 $= z^{\frac{1}{3}\cdot5} = z^{\frac{5}{3}}$
$= \sqrt[3]{z^5}$; $z^{-\frac{1}{2}}$ zur Pot. 6 $= z^{-\frac{1}{2}\cdot6} = z^{-\frac{6}{2}} = \sqrt[3]{z^{-6}}$
$= \sqrt{z^{\frac{2}{6}}}$; $z^{-\frac{2}{n}}$ zur Pot. $\frac{r}{s} = z^{-\frac{1}{n}\cdot\frac{r}{s}} = z^{\frac{-r}{ns}}$
$= \sqrt[ns]{z^{-r}} = \sqrt[ns]{z^{\frac{1}{r}}}$.

IV. Die Ausziehung der Wurzeln:

$\sqrt[3]{x^9} = x^{\frac{9}{3}} = x^3$; $\sqrt{x^5} = \sqrt{x^{-5}} = x^{-\frac{5}{2}}$.

V. Mit zusammen gesetzten Potenzen:

$x^2y^3 \cdot x^4y^{\frac{1}{2}} = x^{2+4}\, y^{3+\frac{1}{2}} = x^6\, y^{6+\frac{1}{2}} = x^6 y^{\frac{7}{2}}$
$= x^6\sqrt{y^7}$; $z^3y : z^4y^2 = z^{3-4}y^{1-2} = z^{-1}y^{-1}$
$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{zy}$; a^2z^4 elevirt zur nten Potenz; $= a^{2n}\, z^{4n}$;
$\sqrt[3]{ax^2} = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{a^3b^2} = a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}$.

Wenn man sich in dergleichen Formeln nicht fleißig übt, so ist es einem schwer, mathematische Schriften zu lesen; denn diese Regeln werden in den Werken der Kenner vorausgesetzt.

Die Irrationalwurzeln und eingebildete oder unmögliche Grösen.

§. 203. Erklär. Eine Irrationalwurzel ist diejenige, die sich nicht genau angeben oder ausziehen läßt; z. E. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$ u. s. w.

§. 204.

§. 204. Anmerk. Der Name Irrational hängt von dem lat. Wort ab, das Rechnen bedeutet, nicht aber von dem, das im Teutschen Vernunft heisset; eine irrationale Gröse ist also nach der wörtlichen oder lexicographischen Bedeutung diejenige, die nicht ausgerechnet werden kann, wenn man auch ohne Ende immer fort rechnete und die Wurzel auszöge. So kann man $\sqrt{2}$, wenn man viele 1000 Jahr an einem fortrechnete, niemalen genau und ohne einigen Fehler finden, nach §. 173.

§. 205. Zusatz. Wenn die Zahl hinter dem Wurzelzeichen sich in solche Factores zerfällen läßt, davon einer die Potenz ist, deren Wurzel man verlangt, so kann man die Irrationalzahl zum Theil von ihrer Irrationalität befreyen. z. E. $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8.5} = 2\sqrt[3]{3}$.

§. 206. Zusatz. Irrationalgrösen, wenn sie nicht ganz irrational sind, können also eine endliche oder rationale Verhältniß haben. z. E. $3\sqrt{2} : 6\sqrt{2} = 3 : 6$.

§. 207. Lehrsatz. Wenn das Quadrat einer Irrationalzahl rational ist, so sind alle gerade Potenzen rational und alle ungerade irrational. Man setzt voraus, daß eine gerade ganze Zahl diejenige sey, die sich durch zwey genau und so dividiren lasse, daß sie aufgeht; welches Anfängern, ja Kindern bekannt ist; wenn nun n eine ganze Zahl ist, so ist $2n$ jedesmal eine gerade ganze Zahl; und $2n + 1$ eine ungerade Zahl. Man setze nun die Wurzel $= \sqrt{a}$, so ist ihr Quadrat $= a$, eine rationale ganze Zahl, wie im Lehrsatz angenommen wurde. Es ist dahero der Beweis für beede Fälle folgender:

I. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{(a)^{2n}} = a^{\frac{1}{2}.2n}$

$a^{\frac{1}{2}2n} = a^{n\sqrt{a}}$

$\sqrt{(a)^{2n}} = a^n$ Rational.

II. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$(2n+1) \quad \frac{1}{2}(2n+1)$

$= a$

$a^{\frac{1}{2}(2n+1)} \quad n+\frac{1}{2}$

$= a$

$a^{n+\frac{1}{2}} = a^n \sqrt{a}$

$\sqrt{(a)^{(2n+1)}} = a^n \sqrt{a}$ Irrational.

§. 208. **Erklär. Eingebildete Wurzeln** (Radices imaginariæ) sind alle Wurzeln von negativen Grösen, die gerade Exponenten haben. z. E. $\sqrt{-4}$ oder $-4^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{-8}$ oder $-8^{\frac{1}{4}}$.

§. 209. **Zusatz.** Weil gleiche Factores, die in gerader Anzahl stehen, nemlich je zween und zween, vier und vier, sechs und sechs u. s. w. jedesmal ein positives Product geben, die Factores mögen positiv oder negativ seyn; (denn $-x \cdot -x = +x^2$, wie $+x \cdot +x = +x^2$) so ist die Wurzel eines geraden Exponenten aus einer negativen Gröse etwas unmögliches; man kann also die eingebildete Wurzeln füglich **unmögliche** Wurzeln heissen.

§. 210. Anmerk. Z. E. $\sqrt{-9}$ ist eine unmögliche Wurzel; denn entweder ist sie $+3$ oder -3. Ist sie $+3$, so ist ihr Product oder Quadrat $= +9$; ist sie -3, so ist abermal ihr Product oder Quadrat $-.3.-3 = +9$. Zwischen $+3$ und -3 gibt es aber kein drittes; das ist der Grund, warum man solche Wurzeln auch unmögliche Wurzeln nennet.

§. 211. **Zusatz.** Die Wurzel eines ungeraden Exponenten aus einer negativen Gröse ist also nicht unmöglich. z. Ex. $\sqrt[3]{-8} = -2$, weil $-2.-2 = +4$ und $+4.-2 = -8$. folglich $\sqrt[3]{-8} = -2$ eine mögliche Gröse.

§. 212. **Lehrsatz.** Man kann alle eingebildete oder unmögliche Wurzeln als Quadratwurzeln ansehen, die entweder aus möglichen negativen Grösen oder aus unmöglichen gezogen werden. Denn der allgemeinste Ausdruck für alle eingebildete oder unmögliche Wurzeln ist, wenn n, wie oben §. 207. eine ganze positive Zahl bedeutet, $\sqrt[2n]{-x}$. Da nun

$$\sqrt[2n]{-x} = -x^{\frac{1}{2}n}$$

$$-x^{\frac{1}{2}n} = -x^{\frac{1}{2},\frac{1}{n}}$$

$$-x^{\frac{1}{2},\frac{1}{n}} = \sqrt{(-x)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\sqrt{(-x)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{(\sqrt[n]{-x})}$$

---

so ist $\sqrt[2n]{-x} = \sqrt{(\sqrt[n]{-x})}$ die Quadratwurzel aus einer möglichen negativen oder unmöglichen Grösse.

§. 213. Anmerk. Wir werden im folgenden weiter unten zeigen, daß eine gerade positive Potenz allemal zwo entgegengesetzte gleiche mögliche Wurzeln habe; wie z. E. $\sqrt{16} = -4$ und $= +4$; weil $-4 . -4 = 16$, und $+4 . +4 = 16$; ferner, daß eine jede Potenz von einem ungeraden Exponenten nur eine mögliche Wurzel habe; und weiter, daß eine Potenz, ihr Exponent mag gerade oder ungerade seyn, so viel theils mögliche theils unmögliche Wurzeln habe, als der Exponent Einheiten hat; z. E. x^3 hat drey Wurzeln, eine mögliche und zwo unmögliche; x^{12} hat zwölf Wurzeln, zwo mögliche und zehen unmögliche; Endlich daß die unmögliche Wurzeln allemal paarweis vorhanden, das ist, wo eine, auch die zweyte, wo drey, auch die vierte, wo fünf, auch die sechste u. s. w. seyn müsse; oder daß die unmögliche Wurzeln niemalen in ungerader Anzahl vorhanden seyn können. Oder allgemein, weil $2n$ der gerade Exponent und $2n+1$ der ungerade Exponent ist, so hat man im ersten Fall $2n-2$ in diesem $2n$ unmögliche Wurzeln. Die ganze Lehre kommt unter dem Titel von Gleichungen vor.

Der

Der binomische Lehrsatz.

§. 214. Erklär. Weil eine jede Grösse aus zween Theilen besteht, und also eine jede Potenz, wenn der Exponent m heißt, durch $(a+b)^m$ ausgedruckt werden kann, so versteht man unter dem **binomischen** Lehrsatz nichts anders, als die Art und Weise, wie man für jede Potenz die Coefficienten auch ausser der Ordnung finden und angeben könne, und in soferne gehört er unter die Erfindungen der Neuern.

§. 215. Anmerk. Der Ursprung des Namens ist, wie mir schon gemeldt, die zweytheilige Wurzel, welche halb griechisch und halb lateinisch binomium heißt; dahero der Lehrsatz selbst Theorema binomiale genannt wird; dem Newton zu Ehren, den man insgemein für den Erfinder davon hält, wird es auch Theorema Newtonianum genannt; Andere wollen den Pascal zum ersten Erfinder davon angeben, besonders Joh. Bernoulli, der dieses bekräftiget; Opp. T. IV. p. 173. Es ist nemlich die Rede von den Bestimmungen, die wir oben vorgetragen haben. Denn sonsten hat man schon in ältern Zeiten was davon gewußt, daß nemlich die Coefficienten durch Addition der figurirten Zahlen entstehen, wie zu dem Ende die Tabula mirifica bekannt ist, auch Clavius schon vor bald 200 Jahren in Geom. pract. L. VI. Prop. 9. davon geschrieben, und ich in meinen ersten Gründen aller mathematischen Wissensch. §. 115. diese Art, wie die Alten sich ausdrucken, angeführt habe. Die allgemeine Formeln und Ausdrücke waren den Alten nicht bekannt. Auch Pascal selbst, wenn er sie erfunden, oder nach ihm Newton, haben bey den Formeln keinen allgemeinen Beweis gegeben, sondern den Satz durch eine Induction vorgetragen. Er läßt sich aber aus der Differentialrechnung unumstößlich beweisen, wie solches zuerst der Herr Prof. Euler bewiesen, Inst Calc. Diff. P. II. §. 72. nachgehends habe ich, da ich zu Berlin bloß um dieses berühmten Gelehrten willen, dessen Unterricht ich nutzen wollte, mich aufhielte, aus meinen zu Berlin gesammelten und zusammengeschriebenen Anmerkungen den Beweis in einem französischen Brief an ihn 1753. Lettre sur quelques paradoxes du Calcul, gerade so vorgetragen, wie ihn Herr Hofrath Kästner 1758 in Theorem. binom. universaliter demonstrato und in den Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen, welche der IV. Th. seiner Mathematik sind §. 46. ausgeführet hat. Da Herr Hofrath Kästner die Gründe der Differentialrechnung über-

zeugender als andere vorgetragen, so ist sein Beweis dadurch noch vollständiger geworden; die Ursache, warum man zum richtigen Beweis die Differentialrechnung nöthig hat, ist diese, weil die Exponenten auch negativ seyn können; denn wenn sie positiv sind, so kann man den Beweis ohne die Beyhülfe dieser Rechnung geben, wie Herr Hofrath Kästner 1745 schon in demonstr. Theor. binom. gezeigt hat; die Bedenklichkeit aber, wenn negative Exponenten vorhanden sind, stehen in seiner Mathem. T. III. §. 752. womit man auch Herrn Clairaut Alegbr. IV. T. Art. 54. und Herrn von Segner Analys. finitorum §. 264. vergleichen kann.

§. 216. **Lehrsatz.** Wenn man den Cubus einer zweytheiligen Wurzel mit der Wurzel multiplicirt, so bekommt man die vierte Potenz, und wenn man diese wieder mit der Wurzel multiplicirt, die fünfte u. s. w. da dann die Potenzen vom ersten Theil der Wurzel oder von a immer in natürlicher Ordnung der Zahlzeichen ab, die von b aber in eben solcher Ordnung zunehmen, und die Coefficienten oder Unzen, wie man sie sonst heißt, das ist, die Zahlen, in welche das Product aus den Theilen der Wurzelu jedesmal multiplicirt ist, die Quotienten sind aus den Producten der vorhergehenden Exponenten von dem ersten Theil der Wurzel oder a, dividirt durch die Producte der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen 1. 2. 3. u. s. w. nach der Anzahl der Glieder, wie solches der Augenschein durch eine Induction in folgender Tabelle erweißt, in welcher die Glieder bis auf die siebente Potenz steigen.

$1a$	$1b$				
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$			
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$		
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$	
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$

§. 217. **Zusatz.** Wenn man also zwo Reyhen Glieder untereinander schreibt, daß die Exponenten der einen eben so abnehmen, wie die Exponenten der andern zunehmen, so werden die Producte der Potenzen selbst die Glieder der Potenz des Binomii, ohne die Coefficienten, geben;

a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
1	b	b^2	b^3	b^4	b^5
a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3,	ab^4	b^5

§. 218. **Zusatz.** Wenn man für den Exponenten von a setzet m, so hat man a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$ u. s. w.

§. 219. **Zusatz.** Die Coefficienten findet man, wenn man die Producte von den vorhergehenden Exponenten durch die Producte der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen dividirt; denn die Coefficienten sind 5, 10, 10, 5, sie kommen aber heraus durch die schon gemeldte Division der Producten, denn

$\frac{5}{1} = 5$

$\frac{5}{1} : \frac{4}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$\frac{5}{1} : \frac{4}{2} : \frac{3}{3} = \frac{60}{6} = 10$

$\frac{5}{1} : \frac{4}{2} : \frac{3}{3} : \frac{2}{4} = \frac{120}{24} = 5$

oder allgemeiner, wenn 5 = m, so sind die Coefficienten $\frac{m}{1}$, $\frac{m.m-1}{1.2}$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$ u. s. w.

§. 220. **Zusatz.** Der allgemeine Ausdruck für eine Potenz ist also $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4}b^4$ u. s. w.

§. 221. **Zusatz.** Weil $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, nach §. 183. so kann die Reyhe, wenn man Gleiches für Gleiches setzt, auch folgendermasen ausgedruckt werden: $a^m + \frac{ma^m b}{1.a} + \frac{m.m-1 a^m b^2}{1.2 \quad aa} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} \frac{a^m b^3}{a^3}$ u. s. w.

§. 222. **Zusatz.** Wenn man den Ausdruck $\frac{a}{b}$, der in allen Gliedern, ausser dem ersten, vorkommt, setzet = Q und das erste Glied a = P, so heißt die Reyhe:

$$P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 \text{ u. s. w.}$$

§. 223. **Zusatz.** Weil das erste Glied im zweyten, das zweyte im dritten, das dritte im vierten u. s. w. enthalten ist, so nenne man, um das viele Schreiben zu vermeiden, das erste Glied A, das zweyte B, das dritte C, das vierte D u. s. w. die Reyhe heißt alsdann, wenn man den übrigen Factor des vorhergehenden Glieds jedesmal beysetzt, $P^m + mAQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ$ u. s. w.

Denn

Denn nach §. 222. ist $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} Q \cdot P^m$, da nun P^m das unmittelbar vorhergehende Glied ist, und gleich A gesetzt wurde, so ist $\frac{m}{1} Q \cdot P^m = \frac{m}{1} Q \cdot A = \frac{m}{1} AQ$ und weil $m \cdot m - 1 \cdot P^m Q^2 = \frac{m}{1} P^m Q \cdot \frac{m-1}{2} Q$; $\frac{m}{1} P^m Q$ aber das unmittelbar vorhergehende Glied war, das man B nennet, so ist $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot P^m Q^2 = B \cdot \frac{m-1}{2} Q = \frac{m-1}{2} BQ$ u. s. f.

§. 224. **Zusatz.** Nach dieser letzten, oder auch nach der ersten Formel kann man daher leicht alle Potenzen finden und alle Wurzeln ausziehen, wenn man nur bemerkt, daß im letztern Fall m ein Bruch seye, z. E. $\sqrt[4]{x^{10}} = x^{\frac{10}{4}}$, da dann $m = \frac{10}{4}$ ist.

§. 225. **Zusatz.** Wenn man in der Reyhe §. 220. $a = 1$ setzt, so hat man $(1+b)^m = 1 + mb + \frac{m \cdot m-1 b^3}{1 \cdot 2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - - -$ und wenn $b = e$, $(1+e)^m = 1 + me + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} e^n - - - - -$.

§. 226. **Zusatz.** Man dividire $(a+b)^m$ durch a, so hat man $\left(\frac{a+b}{a}\right)^m = \left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, diesen Ausdruck multiplicire man wieder mit a, so hat man $\left(a \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^m = a^m \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^m$ nach §. 186. dahero wird die Reyhe $1 + me + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} e^2 - - -$ die erste wieder geben, wenn man $e = \frac{b}{a}$ setzt, und

jedes Glied der Reyhe mit a^m multiplicirt; da dann $(a + b)^m$ wieder herauskommt, und durch diese Substitution eine Reyhe in die andere kann verwandelt werden.

§. 227. **Zusatz.** Wenn der Exponent um eines vermehrt oder $m = m + 1$ gesetzt wird, so sind die Coefficienten $\frac{m+1}{1}$, $\frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}$, $\frac{(m+1) \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. w. und die Reyhe ist

$$a^{m+1} + \frac{m+1}{1} a^m b + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} a^{m-1} b^2 + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-2} b^3 .$$

§. 228. **Anmerk.** Den Beweis für den binomischen Lehrsatz, wie man ihn nach aller Schärfe verlangen kann, habe ich in meinen ersten Gründen aller mathematischen Wissenschaften, die 1759. herauskamen, aus der Lehre der Differentialrechnung vorgetragen und erläutert, P. I. Cap. V. §. 110. und im folgenden soll noch was davon vorkommen.

Die höchste Unterschiede oder Differenzen der Potenzen und die Natur der geraden und ungeraden Zahlen.

§. 229. **Lehrsatz.** Alle gerade Zahlen lassen sich durch $2n$, die ungerade aber durch $2n + 1$ oder $2n - 1$ ausdrucken; denn weil eine gerade Zahl sich durch Zwey muß ganz dividiren lassen, so ist $2n$ der allgemeine Ausdruck für sie; und weil 1 durch 2 dividirt, allemal einen Bruch $= \frac{1}{2}$ gibt, so ist $2n - 1$ oder $2n + 1$ der schicklichste Ausdruck für alle ungerade Zahlen.

§. 230.

§. 230. Zusatz. Die Summe zwoer geraden Zahlen ist gerade; denn $2n + 2n = 4n = 2 . 2n$; auch ist die Summe zwoer ungeraden Zahlen gerade; denn $2n + 1, + 2m + 1 = 2n + 2m + 2$, oder $2n - 1, + 2m + 1 = 2n + 2m$ gerade.

§. 231. Zusatz. Die Summe einer geraden und ungeraden Zahl ist ungerad: denn $2n + 2m + 1$ oder auch $2n + 2m - 1$ ist ungerad.

§. 232. Zusatz. Das Product zwoer geraden und auch einer ungeraden in eine gerade ist gerad; denn $(2n - 1) . 2n = 4n^2 - 2n$; aber das Product zweyer ungeraden Zahlen ist ungerad, denn $(2n - 1) . (2n + 1) = 4n^2 - 1$, so auch $(2n + 1)(2m + 1) = 4nm + 2m + 2n + 1$.

§. 233. Zusatz. Wenn $n = 0$, so ist die erste ungerade Zahl $= 1$, denn $2 . 0 + 1 = 1$, wenn $n = 1$ so ist die andere ungerade Zahl $= 3$. Denn $2n + 1 = 2 . 1 + 1 = 3$; wenn $n = 2$ so ist die dritte ungerade Zahl 5; denn $2 . 2 + 1 = 5$ u. s. w.

§. 234. Zusatz. Wenn man alle ungerade Zahlen nach den natürlichen Reyhen addirt, so findet man alle mögliche Quadrate; denn

$1 = 1$	$= 1$	$= 1^2$
$1 + 3$	4	2^2
$1 + 3 + 5$	9	3^2
$1 + 3 + 5 + 7$	16	4^2
$1 + 3 + 5 + 7 + 9$	25	5^1 u. s. w.

§. 235. Lehrsatz. Wenn zwo Wurzeln um eins unterschieden sind, wie n und $n + 1$, so sind

ihre Quadrate n^2 und $n^2 + 2n + 1$, und der Unterschied ihrer Quadrate ist $2n + 1$, (weil $n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$) wenn man nun in diesem Unterschied wieder setzt $n = n + 1$, so hat man $2(n+1) + 1$, oder $2n + 2 + 1$. Der obige erste Unterschied von diesem zweyten abgezogen, läßt $2n + 2 + 1 - (2n + 1) = 2$, der letzte Unterschied, der unverändert bleibt. Und wenn man die Cubiczahlen eben so behandelt, daß m und $m + 1$ zwo Wurzeln sind, so sind die Cubi m^3 und $m^3 + 3m^2 + 3m + 1$; ihr Unterschied oder Differenz $= 3m^2 + 3m + 1$; nun werde aus m wieder $m + 1$, dessen Wehrt in der Differenz substituirt gibt $3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1 = 3m + 9m + 7$, die obige erste Differenz davon abgezogen, läßt $6m + 6$; die zweyte Differenz; nun werde aus m zum drittenmal $m + 1$, so wird, wenn man im zweyten Unterschied substituirt, aus $6m + 6$ werden $6(m+1) + 6 = 6m + 6 + 6 = 6m + 12$; von diesem den zweyten Unterschied $6m + 6$ subtrahirt, läßt den dritten und letzten Unterschied, der abermal beständig ist. Oder allgemein, wenn x^m gesetzt wird, und aus x wird $x + e$, so hat man $(x + e)^m - x^m$; oder nach §. 216. wirklich erhoben, $x^m + mex^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} e^2 x^{m-2} \ldots - x^m = mex^{m-1}$ ----, der erste Unterschied, dessen höchstes Glied $= mex^{m-1}$. Nun werde aus x abermal $x + e$, so bekommt man den zweyten Unterschied dessen höchstes Glied $(m \cdot m-1)e^2 x^{m-2}$ u. s. w. bis man endlich auf den mten Unterschied kommt, der beständig und der kleinste ist.

§. 236.

§. 236. **Zusatz.** In den Quadraten sind die zweyte Unterschiede beständig, in den Cubis die dritte, in den Biquadraten die vierte u. s. w.

§. 237. **Anmerk.** Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern; man setze folgende Zahlen:

Die Quadr. Wurzel.				Die Cubicwurzel.				
II. Diff.	I. Diff.	I	I	III. Diff.	II. Diff.	I. Diff.	Cubi. I	I
	3	4	2			7	8	2
2	5	9	3		12	19	27	3
2	7	16	4	6	18	37	64	4
2	9	25	5	6	24	61	125	5
2	11	36	6	6	30	91	216	6
2	13	49	7	6	36	127	343	7
				6	42	169	512	8

§. 238. **Anmerk.** Diese Lehre hat viele Vortheile in Erfindung verschiedener Aufgaben; Herr Prof. Kies hat in einer gelehrten akademischen Dissertation, unter dem Titel: Dilucidationes analyseos Finitorum Kæstnerianæ 1762. die Probe davon gegeben, und überhaupt das was schwer scheint, darinn erläutert. Hier aber würde es zu weitläuftig seyn, eine weitere Anwendung zu machen; es ist genug, wenn man den Satz verstehet; die Uebung wird hernach manchem Anleitung geben, aus den dritten, vierten, fünften Unterschieden u. s. w. die Zahlen zu finden, wenn er im Rechnen selbst sich umgesehen hat.

Die Combinationen.

§. 239. **Lehrsatz.** Eine gegebene Anzahl von Dingen, z. E. Buchstaben, Wörtern, Personen, läßt sich so oft versetzen, als das aus allen in natürlicher Ordnung bis auf die gegebene Zahl fortgehenden Zahlzeichen entstehende Product Einheiten hat; wenn z. E. die Zahl 6 gegeben ist, so lassen sich sechs Buchstaben $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ versetzen, oder wenn die Anzahl $= n$, so gibt es $n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5$ u. s. w. Versetzungen. Denn

wenn

wenn man zuerst zween Buchstaben nimmt, a und b, so gibt es nur zwo Versetzungen ab, und ba, das ist 1.2 Combinationen. Nimmt man den dritten Buchstaben c dazu, so kann er dreymal mit ab nemlich vornen, mitten und hinten verbunden werden, und eben so vielmal mit ba, folglich gibt es sechs, oder 3.2.1 Versetzungen.

I.	cab	I.	cba
	acb		bca
	abc		bac.

Der vierte Buchstab d solle dazu kommen; dieser läßt sich viermal mit einem der hingesetzten Sechse verbinden, nemlich vornen, in der zweyten und in der dritten Stelle und hinten.

I.	dcab	II.	dacb	III.	dabc	IV.	dcba	V.	dbca	VI.	dbac
	cdab		adcb		adbc		cdba		bdca		bdac
	cadb		acdb		abdc		cbda		bcda		badc
	cabd		acbd		abcd		cbad		bcad		bacd

Folglich sind die Verbindungen 4.6 oder 24, das ist 4.3.2.1; auf eine ähnliche Weise erhellet, daß fünf Buchstaben sich 5.4.3.2.2 und also allgemein, n Buchstaben, wenn keiner doppelt gesetzt wird, n.n — 1.n — 2.n — 3.n — 4 u. s. w. combiniren lassen.

§. 240. **Zusatz.** Wenn man bey einer gewissen Zahl aufhöret, und fragt, wie vielmal n Zahlen nach der Zahl m, so daß allemal, ohne auf die Ordnung zu sehen, m Einheiten davon zusammen kommen, verbinden lassen, so muß man mit dem Product der natürlichen Zahlzeichen bis auf m die obere Zahl dividiren, das ist, die Combination wird

=

$= \frac{n.n-1.n-2.n-m.-n-4---}{1.2.3.4.5.--\bar{-}-m}$. Denn a, b, c, d sollen so combinirt werden, daß allemal 3 zusammen kommen, so gibt es nur vier Verbindungen; abc, abd, acd, bcd, wenn man, wie vorausgesetzt wird, auf die Ordnung der Buchstaben nicht sieht; das ist $\frac{4.3.2.1}{3.2.1} = 4$.

§. 241. **Zusatz.** Wenn ein Buchstabe doppelt gesetzt wird, oder zweymal vorkommt, so muß man das obige Product mit 2.1 dividiren; kommt er dreymal in einerley Combination vor, so dividirt man mit 3.2.1; und mit 4.3.2.1 wenn er viermal vorkommt, u.s.w. Denn wenn a allein gegeben ist, so gibt es den einigen Ausdruck aa; kommt b dazu, so gibt es drey baa, aba, aab; kommt c dazu, so wird es mit einem jeden der drey nach §. 239. viermal verbunden; also in allem kommen heraus

12 Versetzungen $= \frac{4.3.2.1}{2.1} = \frac{24}{2} = 12$.

§. 242. **Zusatz.** Kommen von zween oder auch von drey Buchstaben u.s.w. je zween und zween zusammen, so gehen die Combinationen nach den Quadraten dieser gegebenen Anzahl; z. E. a und b geben $\begin{matrix} aa & bb \\ ab & ba \end{matrix}$ vier Versetzungen. a, b, c geben neun,

aa, bb, cc
ab ba ca. Vier geben auf eine ähnliche Weise
ac bc cb
16, u.s.w. Folglich lassen sich die neun arabische Zahlzeichen 9^2 mal, das ist, 81 mal combiniren.

§. 243. **Zusatz.** Sind es ihrer drey, davon eine jede dreymal vorkommt, so gehts nach Cubicszahlen,

zahlen, und gibt 27 Versetzungen; sind es vier, und kommt jede dreymal vor, so gibt es $4^3 = 64$ Versetzungen; und so oft lassen sich die Zeichen der Modorum in den Syllogismis A, E, I, O versetzen.

§. 244. Anmerk. Man kann aus diesen Regeln verschiedene Aufgaben auflösen; z. E. wie oft kann man mit 12 Personen an einer Tafel abwechseln? Die Antwort ist nach §. 239. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. Also viel Millionen mal; wenn man sie auch alle Tage zweymal zu Gaste lädet, so wird keiner die Veränderungen auswarten, bis er wieder in seinen alten Platz kommt, sollte er auch noch so alt werden. Eben so nach dem folgenden Zusatz §. 240. kann man bestimmen, wie oft man 24 Buchstaben so combiniren könne, daß z. E. jedesmal 6 zusammen kommen; nemlich $\frac{24.23.22.21.20.19}{1.2.3.4.5.6.} = \frac{23.22.21.4.19}{2.3}$

$= \frac{23.22.21.2.19}{3} = 23.22.7.2.10$ oder $23.22.19.14$, wenn man nemlich oben und unten aufhebt was sich aufheben läßt. Ferner wie oft man aus vierzig Blättern neun nehmen könne, so daß man nie einerley bekomme; $\frac{40.39.38.37.36.35.34.33.32}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$

$= 37.32.19.17.13.11.5 = 273438880$; oder wie oft man aus 38 könne 7 nehmen, nemlich $\frac{38.37.36.35.34.33.32}{1.2.3.4.5.6.7}$

$= 38.37.34.33.8 = 13148076$; welches bey Glücksspielen, wo man die Fälle vergleicht, wenn man in gegenwärtiger Rechnung nur die Millionen nimmt, eine Verhältniß wie 13 : 273, oder ungefehr wie 1 : 21 gibt; da dann unter 21 Fällen nur einer ist, wo man eine Hoffnung hat, was zu gewinnen, gesetzt, daß von 40 nur 2 recht gute sind. Herr Hofrath Kästner hat es auf die Spiele, auf die Modos der Syllogismorum u. s. w. angewendet. Man kann es aber auch auf unsere arabische Zahlzeichen nach der doppelten Verbindung §. 242. anwenden, da sich leicht ergibt, daß neun Zeichen, davon jedes zweymal vorkommt, in der combinatione binaria nur 9 . 9 oder 81 mal können verbunden werden.

§. 245. Anmerk. Man kann hieher noch die figurirte Zahlen rechnen, welche man am besten aus folgender Tabell versteht.

△

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Wenn man die schiefe Parallelreyhen zehlt, so enthält die erste lauter Einheiten, die IIte die Summe dieser Einheiten, also die in natürlicher Ordnung fortgehende Zahlzeichen, die IIIte die Summe der ersten Glieder der vorigen Reyhe, oder natürlichen Zahlen; denn $3 = 2+1$, $6 = 3+2+1$, $10 = 4+3+2+1$ u. s. w. und diese Reyhe Zahlen 1, 3, 6, 10 heißt man Triangularzahlen; die vierte enthält die Summe der Glieder der Triangularzahlen, dann $4 = 3+1$, $10 = 6+3+1$ u. s. w. Diese heißt man Quadrangularzahlen; u. s. w. Lieset man aber die Horizontalreyhen der vorgesetzten Zahlen, so hat man die Coefficienten der Potenzen einer zweytheiligen Wurzel. z. E. 1, 2, 1 $(a+b)^3$, 1, 4, 6, 4, 1 die Coefficienten von $(a+b)^4$, 1, 5, 10 10, 5, 1 die Coefficienten von $(a+b)^5$ u. s. w. Das haben die Alten gewußt, welche diese Tabelle eine Tabulam mirificam genannt; wie dann auch daraus erhellt, warum diese Zahlen figurirte Zahlen heissen.

§. 246. Anmerk. Die Alten haben noch allerhand Eigenschaften der Zahlen gefunden: z. E. die Primzahlen, (numeri primi,) die keine Factores haben, ausser die Einheit und die gegebene Zahl selbst, wenn man sie anders Divisores heissen will; solche Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11 u. s. w. Ferner ist die Rede von vollkommenen Zahlen, deren schon Euclides gedenkt, (numeri perfecti;) solche Zahlen werden durch die Summe und das Produkt ihrer Factorum gemessen; die erste vollkommene Zahl ist 6, weil $1.2.3 = 6$, und $1+2+3 = 6$. die nächste ist 28, weil $1, 2, 4 = 7$ und $4.7 = 28$; diese Zahlen eber sind die Divisores von 28; die dritte ist 496, denn $1, 2, 4, 8, 16 = 313$ und $31.16 = 496$ u. s. f. Man hat bis auf die Trillionen nicht mehr als 8 vollkommene Zahlen heraus gebracht. Was die Pronikzahlen betrift, so sind sie die Summe der Quadrate und Wurzeln; das ist, wenn man zu einem Quadrat seine Wurzel addirt, so hat man die Pronikzahl. $4+2 = 6$ ist eine Pronikzahl, $9+3 = 12$ eine Pronikzahl; oder allgemein n^2+n eine Pronikzahl; weil nun $n^2+n = (n+1)n$, so wird das Product zweyer unmittelbar

bar auf einander folgenden Zahlen allemal eine Pronikzahl seyn: z. E. 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.7, 7.8 u. s. w. sind Pronikzahlen. Da ich bisher von den Zahlen und ihren Combinationen geredet habe, so will ich doch noch was von dem Mairanianischen Problem sagen. Die Aufgabe steht in den Memoires de l' Acad. de Paris 1709. und es ist, so viel mir bekannt, noch keine allgemeine Auflösung gegeben worden. Woher kommt es, daß die Differenz zwoer Zahlen, davon die eine nur die andere verkehrt ist, z. E. (31 — 13 = 18) immer ein Neuner oder das vielfache eines Neuners ist; und daß diese Regel auch bey den Quadraten, Cubis, und höhern Potenzen dieser Zahlen statt hat. Man setze a, b, c, dergestalten, daß b das zweyfache, c das dreyfache von a sey, den Localwehrt drucke man durch m aus; so wird die letzte einfache Note in jeder Progreßion m — 1 seyn; man betrachte nun zwo Zahlen ab und ba, deren eine die andere umgekehrt ist; nach obiger Bestimmung des Localwehrts und Bedeutung der Buchstaben ist $ab = ma + 2a$ und $ba = 2ma + a$; nun subtrahire man, so ist $ba - ab = 2ma + a - ma - 2a = ma - a = (m - 1)a$. Wenn also $a = 1$, so ist die Differenz $m - 1$, das letzte einfache Zahlzeichen, folglich in der decadischen Progreßion 9. Setzt man die Zahlen $ca - ac$, das ist $3ma + a - ma - 3a = 2ma - 2a = (2m - 2)a$, so hat man, wenn $a = 1$, die Differenz $(m - 1)2$, folglich in der decadischen Progreßion das Multiplum von neune; setzt man endlich $cba - abc$, das ist $2m^2a + 2ma + a - m^2a = 2ma - 3a = (2m^2 - 2)a$, das ist wenn $a = 1$ die Differenz $(m^2 - 1)2 = (m - 1)(m + 1)2$; oder überhaupt

weil $m^n - 1 = m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + m^{n-4} \ldots\ldots + 1$) $(m - 1)$ das Multiplum von der letzten einfachen Note, folglich in der decadischen Progreßion das vielfache von 9; diß ist allgemein; wenn nur die Wurzelzahlen allemal verkehrt sind, ihre Quadrate und Cubi darfen es deßwegen nicht auch seyn. z. E. $213 = 9261$ und $123 = 1728$, diese zween Cubi sind nicht einerley verkehrte Zahlen, und doch ist ihre Differenz 7533 ein vielfaches von neun; hier meynt Herr von Mairan eine grose Schwürigkeit gefunden zu haben; allein die Generalregel wird alles klar machen; $21^3 = (2ma + a)^3 = (2m + 1)^3 = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1$; eben so ist $12^3 = (ma + 2a)^3 = (m + 2)^3 = m^3 + 6m^2 + 12m + 8$ und ihre Differenz $21^3 - 12^3 = 7m^3 + 6m^2 - 6m + 7$. $= (m^3 - 1)7 + (m - 1)6m$. $= (m^2 + m + 1)(m - 1)7 + (m - 1)6m$. welches das vielfache der letzten einfachen Note, oder in der decadischen Progreßion das vielfache von

von Neun ist. Ich habe hievon, und auch von der Beobachtung, daß alle Multipla von 9 durch die Addition wieder Neune werden, z. E. $18 = 8 + 1 = 9$ 27 gibt $2 + 7 = 9$. u. s. w. ausführlich in meinen Opusculis varii Argumenti 1767. Tractatu III. gehandelt.

Von den Proportionen.

§. 247. Erklär. Die Vergleichung zwoer Zahlen entweder durch die Subtraction oder durch die Division heißt in jenem Fall eine **arithmetische**, in diesem eine **geometrische** Verhältniß; und die Gleichheit zwoer Verhältnisse heißt eine **Proportion**. z. E. $3 - 1 = 2$, und $5 - 3 = 2$; das sind zwo arithmetische Verhältnisse, deren Differenz beederseits $= 2$; folglich gibt diese Gleichheit eine arithmetische Proportion $3 - 1 = 5 - 3$; ferner $6 : 2$ und $15 : 5$ sind zwo geometrische Verhältnisse, deren Quotient beederseits 3; diese Gleichheit gibt nun eine geometrische Proportion, $6 : 2 = 15 : 5$.

§. 248. Zusatz. Weil das Zeichen der Division : und der Subtraction — und der Gleichheit =, so ist die Art solcher Proportionen, wie Leibnitz schreiben lehret, ganz natürlich $6 : 2 = 15 : 5$ und $3 - 1 = 5 - 3$.

§. 249. Anmerk. Sonst schreibt man auch die geometrische Proportionen 6.2:15.5, besonders in den Schriften der Engländer.

§. 250. Anmerk. Die Alten haben nur geometrische Verhältnisse betrachtet: dahero, wenn kein Beyname bey dem Wort Verhältniß und Proportion gesetzt ist, so versteht man allemal die geometrische Proportionen darunter.

§. 251. Zusatz. Es ist gleichgültig, ob das kleinere Glied vor- oder nachgesetzt wird, denn wie $6 : 2 = 15 : 5$, so ist auch $2 : 6 = 5 : 15$.

§. 252. Erklär. Man heißt nemlich die Theile einer Proportion **Glieder**; und weil sie eine Gleichheit zwoer Verhältnisse ist, so hat sie vier Glieder, das erste, das zweyte, das dritte, das vierte Glied.

§. 253. Erklär. Wann das zweyte und dritte Glied einander gleich ist, so heißt die Proportion **continuirlich, stetig, zusammenhangend**; proportio continua: ist aber das dritte vom zweyten unterschieden, so heißt die Proportion **discret, abgesondert**, proportio discreta. z. E. 3:6 = 6:12 ist eine continuirliche geometrische, 2 — 3 = 3 — 4 eine continuirliche arithmetische Proportion, und 2:6 = 5:15 eine discrete geometrische, 4 — 7 = 3 — 6 eine discrete arithmetische Proportion.

Von den arithmetischen Proportionen und Reyhen.

§. 254. Lehrsatz. Weil die arithmetische Proportion aus zwo gleichen arithmetischen Verhältnissen besteht, die folglich einerley Differenz haben, so darf man nur in einer discreten Proportion zum ersten und zum dritten Glied die Differenz addiren, wenn man das zweyte und vierte verlangt; in einer continuirlichen Proportion oder auch Reyhe wird die Differenz zum ersten Glied so vielmal addirt, als es die Anzahl der verschiedenen Glieder erfordert. Wenn nun das erste Glied a, das dritte b, und die Differenz d heißt, so ist a — (a + d) = b — (b + d) der allgemeine Ausdruck einer discreten arithmetischen Pro-

Proportion; wie es $a - a + d = a + d - a + 2d$ von einer continuirlichen arithmetischen Proportion ist.

§. 255. **Zusatz.** Die Summe des ersten und vierten Glieds ist der Summe des zweyten und dritten Glieds in einer arithmet. discreten Proportion gleich. Denn man addire

$$a - (a + d) = b - (b + d)$$

so hat man beederseits gleiche Summen,

$$b + d \quad b$$

$$a + b + d = a + d + b.$$

§. 256. **Zusatz.** Man kann also das vierte Glied finden, wenn man von der Summe der beeden mittlern das erste abzieht.

§. 257. **Zusatz.** In einer continuirlichen Proportion ist die Summe der beyden äussersten Glieder dem zweyfach genommenen mittleren Glied gleich.

$$a - a + d = a + d - a + 2d$$

$$\frac{a + 2d \qquad a + d}{2a + 2d \qquad = 2a + 2d.}$$

§. 258. **Zusatz.** Man kann also das mittlere Glied finden, wenn man die Summe der beeden äussersten halbirt oder mit 2 dividirt.

§. 259. **Anmerk.** Man kann die Sache mit Exempeln erläutern; $2 - 5 = 4 - 7 = 2 - 2 + 3 = 4 - 4 + 3$. Hier ist die Differenz 3; also $d = 3$, und das erste Glied oder $a = 2$, das vierte oder $b = 4$. Wenn man nun das erste und vierte addirt, so hat man $2 + 7 = 9$, und das zweyte und dritte, so hat man $5 + 4 = 9$, beederseits einerley Summe; gesetzt nun, man wollte das vierte finden, so ist, wenn man von der Summe des zweyten und dritten das erste Glied subtrahirt, $(5 + 4) - 2 = 9 - 2 = 7$. Eben so wenn continuirlich ist $2 - 5 = 5 - 8$, so ist die Differenz oder $d = 3$, das erste Glied oder $a = 2$, folglich

$$\begin{array}{cccccc} 2 & - & 2+3 & = & 2+3 & - & 2+3+3 \\ 2 & - & 5 & = & 5 & - & 8 \end{array}$$

Man bekommt also das mittlere Glied, wenn man die Summe

von den beeden äussersten halbirt, da $\frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Der Beweis ist aus dem obigen klar, und hat nicht die mindeste Schwürigkeit.

§. 260. **Erklärung.** Eine Menge Zahlen, die in continuirlichen oder zusammenhängenden arithmetischen Verhältnissen immer fortgehen, machen eine arithmetische **Reyhe** oder **Progreßion** aus. So ist die Reyhe der natürlichen Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w. eine arithmetische Progreßion, deren Differenz immer einerley, nemlich 1 ist.

§. 261. **Lehrsatz.** Die Summen der äussersten und von den äussersten gleichweit abstehenden Gliedern in einer arithmetischen Progreßion sind allemal einander gleich. Denn es sey die Reyhe

1	2	3	4	5	6	7
a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d,	a+5d,	a+6d
			a+3d	a+2d	a+d	a
			2a+6d	2a+6d	2a+6d	2a+6d

so ist die Summe des ersten und siebenden, des zweyten und sechsten, des dritten und fünften, und des vierten zweyfaches einerley Summe.

§. 262. **Zusatz.** Wenn die Zahl der Glieder ungerad ist, so ist das mittelste vom ersten und letzten gleichweit entfernt, folglich wird sein zweyfaches der Summe der beeden äussersten gleich seyn.

§. 263. **Lehrsatz.** Das letzte Glied ist allemal die Summe des ersten, und der in die um eins verminderte Anzahl der Glieder multiplicirten Differenz gleich; denn wenn n die Anzahl der Glieder ist, so ist

1 2 3 4 5 n
a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, — — — a+(n—1)d

Die Differenz des dritten Gliedes ist $2d = (3-1)d$, die vom vierten $3d = (4-1)d$, die vom fünften $4d = (5-1)d$, also jedesmal um eins weniger, folglich die vom letzten oder nten Glied $(n-1)d$, und das letzte Glied selbst $a+(n-1)d$.

§. 264. **Zusatz.** Wenn die Glieder steigen, so ist d positiv; fallen sie, so ist d negativ.

§. 265. **Lehrsatz.** Man kann die Summe einer arithmetischen Progression finden, wenn man die Summe des ersten und letzten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. Denn

weil 1 2 3 4 5 6
a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d
a+2d a+d a
2a+5d, 2a+5d, 2a+5d

da die Addirung der äussersten und von den äussersten gleichweit abstehenden Glieder halb so viel gleiche Paare gibt, als Glieder vorhanden sind, so darf man diese gleiche Paare nur zusammen addiren, um die ganze Summe zu bekommen.

Denn $2a + 5d$
$2a + 5d$
$2a + 5d$
gibt $6a + 15d$.

Diß aber bekommt man, wenn man die Summe des ersten und letzten Glieds durch die halbe Anzahl der Glieder multiplicirt, denn $6a + 15d = (2a + 5d)\frac{6}{2}$.

§. 266. **Zusatz.** Nach dem allgemeinen Ausdruck, wenn n die Zahl der Glieder ist, wird als-

dann das letzte Glied heissen $a + (n-1)d$, die Summe $= (2a + (n-1)d)\frac{1}{2}n$.

§. 267. **Zusatz.** Man hat also die Differenz, das erste Glied, das letzte Glied, die Anzahl der Glieder, und die Summe der Glieder; wenn nun von diesen fünf Dingen drey gegeben sind, so kann man allemal die zwey übrige finden. z. E. Aus dem ersten Glied, der Anzahl der Glieder und der Differenz, die Summe: denn wenn die obige Stücke d, a, u, n und S heissen, so ist $S = (a + u)\frac{1}{2}n$, die Anzahl der Glieder mag gerade oder ungerade seyn. 2) $u = a + (n-1)d$. 3) $n = \frac{2S}{a+u}$. 4) $d = \frac{u-a}{n-a}$ 5) $a = u - (n-1)d$. Man siehet auch zugleich, daß man aus jeder Vergleichung noch mehrere Wehrte herausbringen könne.

§. 268. **Anmerk.** Die Summe aller natürlichen Zahlzeichen von 1 bis 100, ist also $(1 + 100)\frac{1}{2}100 = 101 . 50 = 5050$. Eben so die von 1 bis 1000000 ist $= (1000000 + 1) . \frac{1000000}{2} = 500000\ 500000$. Weil ferner alle ungerade Zahlen um 2 von einander unterschieden sind, z. E. 1, 3, 5, 7 u. s. w. so ist von n ungeraden Zahlen das letzte Glied oder $u = 1 + (n-1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$, folglich $S = (1 + 2n - 1)\frac{1}{2}n = (2n)\frac{1}{2}n = \frac{2n^2}{2} = n^2$: Die Summe der ersten hundert ungeraden Zahlen ist also $100 . 100 = 10000$, und die hundertste ungerade Zahl $= 200 - 1 = 199$.

Die geometrische Proportionen.

§. 269. **Erklär.** Die Gleichheit zwoer geometrischen Verhältnisse ist eine geometrische **Proportion**; wenn das zweyte Glied mit dem dritten einerley ist, so heißt sie **zusammenhangend** (continua);

tinua); sind beede Glieder aber verschieden, so ist sie **discret**; (discreta). Das erste und dritte, wie auch das zweyte und vierte Glied nennt man **gleichnamige** oder **gleichliegende Glieder** (homologa).

§. 270. **Lehrsatz.** Der allgemeine Ausdruck für alle geometrische Proportionen ist a : ma = b : mb; oder wenn sie zusammenhangend ist, a : ma = ma : m²a; wo *m* das vielfache bedeutet. Denn *a* ist in *ma* so vielmal enthalten als *b* in *mb*, oder als ma in mma; das ist aber die Erklärung der geometrischen Proportionen, daß das erste Glied im zweyten so oft, als das dritte im vierten oder umgekehrt enthalten sey; folglich zeigt der gegebene Ausdruck alle nur mögliche geometrische Proportionen an.

§. 271. **Zusatz.** Das Product der beeden äussersten und mittlern Glieder in einer geometrischen Proportion ist einander gleich; denn a.mb = ma.b; oder amb = mab; und wenn die Producte gleich sind, so ist die Proportion geometrisch.

§. 272. **Zusatz.** Wenn man das Product der zwey mittlern mit dem ersten dividirt, so findet man das vierte Glied, und kraft der erlaubten Versetzung, da ein jedes Glied zum vierten werden kann, aus drey gegebenen Stücken allemal das vierte. Denn $\frac{amb}{a} = mb$, und $\frac{amb}{mb} = a$, und $\frac{amb}{am} = b$, und $\frac{amb}{b} = am$.

§. 273. **Zusatz.** Weil in einer zusammenhangenden Proportion die beede mittlere Glieder einander gleich sind, so ist das Product des mittlern in sich selbst, das ist, sein Quadrat dem Product

der beeden äussersten gleich; man findet also das mittlere Glied, wenn man aus dem Product der beeden äussersten Glieder die Quadratwurzel ausziehet.

§. 274. **Zusatz.** In einer stetigen Proportion kann man daher aus zwey gegebenen Gliedern schon das dritte finden, es mag das mittlere oder eines der äussersten gesucht werden.

§. 275. **Lehrsatz.** Die geometrische Proportionen lassen sich theils durch die Versetzung der Glieder, theils durch die Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzel verändern, so daß jedesmal eine wahre geometrische Proportion wieder herauskommt, welche man daran erkennet, weil die Producte der äussersten und mittlern Glieder immer gleich sind, oder weil das erste Glied im zweyten so oft, als das dritte im vierten enthalten ist.

§. 276. **Erläuter.** Folgende Exempel, welchen der allgemeine Beweis jedesmal in Buchstaben beygesetzt ist, werden die Sache deutlich machen. Es sey die Hauptproportion, die verändert werden solle

$a : ma = b : mb$ $\quad 2 : 6 = 4 : 12$

so ist I. Permutando vel vicissim oder die mittlere verwechselt.

$a : b = ma : mb$ $\quad 2 : 4 : 6 : 12$

II. Invertendo oder umgekehrt.

$ma : a = mb : b$ $\quad 6 : 2 = 12 : 4$

$mb : b = ma : a.$ $\quad 12 : 4 = 6 : 2$

III. Componendo oder zusammengesetzt:

$a : ma + a = b : mb + b$ $\quad 6 : 2 + 6 = 12 : 4 + 12 =$ $\begin{cases} 6 : 8 = 12 : 16 \\ 8 : 6 = 16 : 12 \\ 8 : 2 = 16 : 4 \\ 18 : 12 = 6 : 4 \end{cases}$

$a + ma : a = b + mb : b$ $\quad 6 + 2 : 6 = 12 + 4 : 12 =$

$a + ma : ma = b + mb : mb$ $\quad 6 + 2 : 2 = 12 + 4 : 4$

$a + b : b = ma + mb : mb$ $\quad 6 + 12 : 12 = 2 + 4 : 4$

IV. Subtrahendo vel differentiando oder durch die Subtraction.

$a : a - ma = b : b - mb$

$a - ma : ma = b - mb : mb$ $\quad 6 : 6 - 2 = 12 : 12 - 4$ $\quad \begin{cases} 6 : 4 = 12 : 8 \\ 4 : 2 = 8 : 4 \end{cases}$

$a - b : b = ma - mb : mb.$ $\quad 6 - 2 : 2 = 12 - 4 : 4$

V.

V. Multiplicando & dividendo, wenn man eine oder beede Verhältnisse mit einer dritten Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$\left\{\begin{array}{l} ac : mac = b : mb \\ ac : mac = bd : mbd \\ ac : mac = bc : mbc \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} 6.3 : 2.3 = 12 : 4 \\ 6.3 : 2.3 = 12.2 : 4.2 \\ 6.3 : 2.3 = 12.3 : 4.3 \end{array} \quad = \left\{\begin{array}{l} 18 : 6 = 12 : 4 \\ 18 : 6 = 24 : 8 \\ 18 : 6 = 36 : 12 \end{array}\right.$$

Ferner:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb \\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d} \\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = 12 : 4 \\ \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{3} : \frac{4}{3} \\ \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{2} : \frac{4}{2} \end{array} \quad = \left\{\begin{array}{l} 3 : 1 = 12 : 4 \\ 3 : 1 = 4 : \frac{4}{3} \\ 3 : 1 = 6 : 2 \end{array}\right.$$

VI. Durch Erhebung zu Potenzen, da man alle vier Glieder zu einerley Potenz erhebt:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2 \\ a^n : m^na^n = b^n : m^nb^n \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6^2 : 2^2 = 12^2 : 4^2 \\ 6.6 : 2.2 = 12.12 : 4.4 \end{array} \Big\} 36 : 4 = 144 : 16$$

nicht aber

$a^2 : m^2a^2 = b : mb$

oder $a^2 : m^2a^2 = b^3 : m^3b^3$

Weil hier nicht einerley Producte beym Multipliciren der äussersten und mittlern Glieder herauskommen; denn a^2mb ist dem Product m^2a^2b nicht gleich; so auch $a^2 . m^3b^3$ ist was ganz anders als $m^2a^2b^3$.

VII. Durch Ausziehung der Wurzeln, wo man aus allen vier Gliedern einerley Wurzel extrahirt.

$$\sqrt{a^2} : \sqrt{m^2a^2} = \sqrt{b^2} : \sqrt{m^2b^2}$$

$$\sqrt[n]{a^n} : \sqrt[n]{m^na^n} = \sqrt[n]{b^n} : \sqrt[n]{m^nb^n}$$

$\sqrt{36} : \sqrt{4} = \sqrt{144} : \sqrt{16}$ das ist

$6 : 2 = 12 : 4$ die erste Proportion wieder.

§. 277. Lehrsatz. Wenn zwo Proportionen mit einander so übereinkommen, daß zwo Verhältnisse davon einer und eben derselben dritten

Verhältniß gleich sind, so kommt auf eine dreyfache Weise die dritte Proportion heraus. Denn I. entweder sind die zwey erste paar Glieder, oder welches nach dem vorigen Lehrsatz von den Versetzungen gleichviel ist, die zwey letzte paar Glieder einander gleich; II. oder es ist das erste und dritte, oder zweyte und vierte paar Glieder, oder auch nach den Versetzungen das erste in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der einen dem vierten in der andern Proportion gleich; III. oder endlich ist das erste und letzte paar oder das zweyte und dritte paar Glieder, oder das erste paar in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der andern dem vierten in der ersten Proportion gleich. Im ersten Fall schließt man ex æquo, überhaupt; im zweyten ordinatim, im dritten perturbate.

§. 278. **Erläuter.** Die folgende Exempel, die man sich wohl bekannt machen muß, werden das gesagte erläutern, wo der Beweis in Buchstaben dabey steht.

I. Fall: ex æquo simpliciter.

a : ma = b : mb
a : ma = c : mc
---
b : mb = c : mc

4 : 8 = 3 : 6
4 : 8 = 5 : 10
---
3 : 6 = 5 : 10

II. Ordinatim ex æquo.

1) a : ma = b : mb
| |
mna : ma = mnb : mb
---
a : mna = b : mnb.

4 : 12 = 2 : 6
10 : 12 = 5 : 6
---
4 : 10 = 2 : 5

2) a : ma = b : mb
\ \
ma : mna = mb : mnb
---
a : mna = b : mnb.

5 : 15 = 2 : 6
\ \
15 : 30 = 6 : 12
---
5 : 30 = 2 : 12

III. Perturbate ex æquo;

1) $a : ma = b : mb$

$mna : ma = b : \frac{b}{n}$

$a : mna = \frac{b}{n} : mb.$

$4 : 2 = 12 : 6$

$8 : 2 = 12 : 3$

$4 : 8 = 3 : 6$

2) $a : ma = b : mb$

$ma : mna = \frac{b}{n} : b$

$a : mna = \frac{b}{n} : mb.$

$4 : 2 = 12 : 6$

$2 : 8 = 3 : 12$

$4 : 8 = 3 : 6.$

§. 279. Lehrs. Wenn man ganz verschiedene geometrische Proportionen mit einander multiplicirt oder dividirt, so kommen wiederum geometrische Proportionen heraus, worinnen nur immer gleichnamigte Glieder bey den vier Rechnungsarten verbunden werden.

Es sey gegeben	$a : ma = b : mb$	$5 : 10 = 2 : 4$
	$c : nc = g : ng$	$3 : 6 = 4 : 8$
I. Multipl.	$ac : mnac = bg : mnbg$	$15 : 60 = 8 : 32.$
II. Dividirt	$\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{g} : \frac{mb}{ng}$	$\frac{5}{3} : \frac{10}{6} = \frac{2}{4} : \frac{4}{8}$

§. 280. Zusatz. Wenn die Proportionen einerley Verhältniß haben, so wird noch eine Proportion herauskommen, wenn man die gleichnamige Glieder addirt oder subtrahirt; dann

$a : ma = b : mb$

$c : mc = d : md$ gibt

$a + c : m(a + c) = b + d : m(b + d)$

$2 : 4 = 3 : 6$

$5 : 10 = 1 : 2$

$7 : 14 = 4 : 8.$

Ist aber die Verhältniß verschieden, so geht die Addition und Subtraction nicht an; die Multiplication und Division hingegen ist in allen Fällen richtig.

§. 281. **Zusatz.** Wenn bey Proportionen, die in einander multiplicirt werden, zwey nicht homologe Glieder gleich sind: so verhält sich das Product des ersten Paars Glieder zum Product des andern Paars, wie das dritte Glied der ersten zum vierten Glied der andern Proportion.

Es seye $T : t = E : v$
$C : c = v : e$

$CT : tc = Ev : ev$ so ist

$\frac{\quad}{\quad} : v$

$CT : tc = E : e.$

§. 282. **Anmerk.** Gesetzt nun E und e bedeuten Wirkungen, C und c Ursachen, T und t Zeiten, in welchen die Wirkungen hervorgebracht werden, so werden sich die Wirkungen wie die Producte aus den Zeiten in die Ursachen verhalten: denn wenn die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen wie die Ursachen; und wenn die Ursachen gleich sind, wie die Zeiten.

§. 283. **Zusatz.** Wenn drey oder mehrere Proportionen ein so gemeinschaftliches Glied haben, so werden die Producte aller ersten Glieder zu den Producten aller zweyten Glieder sich verhalten wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten der letzten Proportion.

$a : b = g : h$
$c : d = h : q$
$e : f = q : r$

$ace : bdf = ghq : hqr$

$\frac{\quad}{\quad} : hq$

$ace : bdf = g : r.$

§. 284. Anmerk. Diese Proportion heißt man sonsten die Kettenregel, wie die unmittelbar vorhergehende die Regel Quinque. Sie dienen, besonders die Kettenregel, dazu, daß man einen Begriff von den zusammengesetzten Verhältnissen bekomme, z. E. 3 ist in 12 viermal und 12 in 60 fünfmal enthalten; folglich ist die Verhältniß von 3 zu 60 aus der Verhältniß von 3 zu 12 und 12 zu 60 zusammengesetzt, das ist, 3 steckt in 60 viermal fünfmal oder zwanzigmal. Das bisher vorgetragene muß man sich vorzüglich bekannt machen, weil die Lehre von den Proportionen, wie wir schon gemeldt, die Seele der ganzen Mathematik ist.

Von den geometrischen Progreßionen oder Reyhen.

§. 285. Erklär. Eine **geometrische Reyhe oder Progreßion** ist eine Menge von Zahlen oder Grösen überhaupt, die in einer zusammenhangenden geometrischen Proportion (Prop. continua) fortgehen. Diejenige Grösе oder Zahl, welche anzeigt, wie vielmal das unmittelbar vorhergehende Glied im nachfolgenden enthalten sey, heißt der **Exponent**, oder auch der Name der Verhältniß.

§. 286. Lehrsatz. Der allgemeine Ausdruck einer geometrischen Progreßion, wenn man das erste Glied = a, den Exponenten = m und die Zahl der Glieder = n seßet, wird folgender seyn, wenn man von dem leßten Glied anfängt und rückwarts schreibt:

$m^{n-1}a$, $m^{n-2}a$, $m^{n-3}a$, $m^{n-4}a$, $m^{n-5}a$

u. s. w.

Denn man zehle die Glieder und schreibe vorwarts

1	2	3	4	5	6
a	ma	m^2a	m^3a	m^4a	m^5a

u. s. w. so ist der Exponent des gegebenen Gliedes allemal um eins weniger als die Zahl des Gliedes; z. E. die

Pro-

Progreßion gehe mit dem sechsten Glied aus; dieses Glied heißt $m^5 a$, nun ist $m^5 a = m^{6-1} a$, und wenn die Anzahl der Glieder nemlich $6 = n$ gesetzt wird, so ist $m^5 a = m^{6-1} a = m^{n-1} a$; das uneins letzte Glied heißt also $m^{n-2} a$, u. s. f. daher der gegebene Ausdruck allgemein ist.

§. 287. **Zusatz.** Das letzte Glied in einer geometrischen Proportion ist also jedesmal $u.^{n-1} a$; und wenn man dieses letzte Glied u nennet, so ist $mu = m^n a$, denn

$m^{n-1} a = u$ nach dem angenommenen Satz.

$$m^{n-1} a = \frac{m^n a}{m} \text{ nach §. 183.}$$

$$u = \frac{m^n a}{m}$$

$$mu = m^n a \,.^{m}$$

Ferner, wenn man von einer Potenz m^n eine Einheit subtrahirt, so wird sie, vergl. §. 148. in folgende Reyhe verwandelt, $m^n - 1 = (m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} \text{----} + 1)m - 1$.

§. 288. **Lehrsatz.** Die Summe einer geometrischen Proportion ist jedesmal $\frac{a - mu}{1 - m}$, wo a das erste Glied, m den Exponenten und u das letzte Glied bedeutet.

Beweis.

$\frac{1}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \text{----} + \frac{m^n}{1-m}$ nach §. 157.

$\frac{m^n}{1-m} = \frac{m^n}{1-m}$ subtrah.

$\frac{1}{1-m} - \frac{m^n}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \text{----}$ das ist, weil die Nenner gleich nach §. 155.

$1 -$

$$\frac{1-m^n}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \text{ ----}$$

$$\frac{a-m^n a}{1-m} = a + ma + m^2 a + m^3 a \text{ -----}$$

$m^n a = mu$ nach §. 287. substituirt

$$\frac{a-mu}{1-m} = a + ma + m^2 a + m^3 a, \text{ -----}$$

§. 289. **Zusatz.** Wenn die Progreßion abnimmt oder fällt, das ist, wenn die folgende Glieder immer kleiner werden, so ist m ein eigentlicher Bruch, folglich Zehler und Nenner positiv; wenn sie aber steigt, oder die nachfolgende Glieder immer gröser werden, so ist m ein uneigentlicher Bruch, folglich Zehler und Nenner negativ; der Quotient aber dennoch positiv. nach §. 151.

§. 290. **Zusatz.** Aus dem ersten und zweyten Glied, oder aus dem ersten Glied und dem Exponenten kann man alle folgende Glieder durch die Regel §. 274. die man sonst die Regel de Tri heißt, finden.

§. 291. **Zusatz.** Wenn die Summe = S, das erste Glied = a, das lezte = u, der Exponent = m, und die Zahl der Glieder = n gesezt werden, so kann man nach diesen fünf Benennungen fünf Aufgaben auflösen, da man aus drey gegebenen Stücken von diesen fünf allemal die zwey übrige findet; einige davon werden logarithmisch aufgelößt; davon im folgenden gehandelt wird.

§. 292. **Zusatz.** Wenn das zweyte Glied = b, so ist der Exponent = $\frac{b}{a}$; denn im allgemeinen

nen

neu Ausdruck ist das zweyte Glied ma, folglich hier

$$ma = b$$
$$\text{———} : a$$

$ma = \frac{b}{a}$ man kann also den Exponenten finden und wegschaffen.

§. 293. **Zusatz.** Wenn das erste Glied nicht eins, so darf man nur alle Glieder durch das erste Glied dividiren; man wird alsdann eine Reyhe bekommen, die einerley Verhältniß mit der vorigen hat.

a, ma, m^2a, m^3a, --	oder	7, 14, 28, 56, 112
1 m m^2 m^3,		1, 2, 4, 8, 16.

Die Reyhe 1, 2, 4, 8 u. s. w. hat eben die Verhältniß, welche 7, 14, 28, 56 hat; dahero man in Ansehung der Verhältniß alle Reyhen auf solche reduciren kann, deren erstes Glied 1.

§. 294. **Zusatz.** Wenn das erste Glied 1, das zweyte m, so enthält die Reyhe lauter Potenzen vom m, oder vom zweyten Glied.

§. 295. **Zusatz.** In einer geometrischen Reyhe sind die Producte der äussersten und von der äussersten gleichweit abstehenden Glieder gleich, z. E. 1, 2, 4, 8, 16, 32. wo 1.32 = 2.16 = 4.8. nach §. 271. 273.

§. 296. **Lehrsatz.** Wenn man die Summe einer geometrischen Progreßion von Brüchen, deren Zehler 1. ist, S, und den Nenner des ersten Bruchs a nennt, so ist $S = \frac{1}{a-1}$, wenn die Zeichen nicht abwechseln; hingegen $S = \frac{1}{a+1}$, wenn die Zeichen plus und minus abwechseln.

Bew.

Bew. I. Fall.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}\text{---}=S$ .a

$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\text{---}=aS$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\text{--}=S$ subt.

$1=aS-S$ das ist

$1=(a-1)S$:a—1

$\frac{1}{a-1}=S.$

Bew. II. Fall.

$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}\text{---}=S$ .a

$1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\text{-}=aS$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\text{--}=S$ add.

$1=aS+S$ oder

$1=(a+1)S$:a+1

$\frac{1}{a-1}=S.$

§. 297. **Lehrsatz.** Wenn man das vorhergehende Glied von dem nächstfolgenden immer abzieht, so wird die Progreßion der Differenzen wieder eine geometrische Progreßion seyn, die den vorigen Exponenten hat.

Beweis:

Die Progreßion

ist $a, ma, m^2a, m^3a, m^4a \text{ - - - } m^{n-1}a.$

ihr Unterschied $ma-a, m^2a-ma, m^3a-m^2a, m^4a-m^3a$ - -

d. i. nach §. 148. $(m-1)a, m(m-1)a, m^2(m-1)a, m^3(m-1)a$ - - -

also wieder eine geometrische Progreßion von einerley Exponenten.

§. 298. **Zusatz.** Man kann die zweyte, dritte, vierte Reyhe der Unterschiede eben so finden, da allemal eine ähnliche geometrische Proportion herauskommen wird. z. E.

Hauptreyhe:	1,	3,	9,	27,	81,	243.
I. Differenzreyhe		2,	6,	18,	54,	162.
II. Differenzreyhe			4,	12,	36,	108.
III. Differenzreyhe					24,	72.
IV. Differenzreyhe					16,	48.

Von den Logarithmen.

§. 299. Erklär. Wenn man unter eine geometrische Progreßion, die mit 1 anfangt, eine arithmetische schreibet, deren erstes Glied = 0, so enthält die zweyte Reyhe die Logarithme der ersten Reyhe.

§. 300. Zusatz. Die Möglichkeit dieser Erklärung ist an sich klar; denn beede Gattungen von Progreßionen sind möglich; folglich auch das, was daraus folget; wir werden aber sogleich zeigen, daß die Logarithmen nicht anders als auf diese Weise betrachtet werden können.

§. 301. Lehrsatz. Die logarithmische Reyhe muß nothwendig mit einer Nulle anfangen, wenn das erste Glied der geometrischen Proportion eins ist; denn die Progreßion sey $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$ u. s. w. so ist der Exponent von $1 = 0$, weil $1 = a^0$, der von $a = 1$, der von $a^2 = 2$ u. s. w. nun sind diese Exponenten die Zahlen der Verhältnisse, oder die Logarithmen, welche anzeigen, wie vielmal das erste Glied nach 1 in den folgenden enthalten sey; z. E. das vierte Glied enthält a dreymal, also ist sein Logarithme = 3, das nte Glied enthält das nächste nach dem ersten (n — 1) mal; folglich muß die logarithmische Reyhe mit 0 anfahen, wenn das erste Glied = 1.

§. 302. Zusatz. Weil alle geometrische Progreßionen, das erste Glied mag seyn was es will, durch die Division des ersten Glieds, auf eine solche gebracht werden können, deren erstes Glied eins wird

nach §. 293. und zwar so, daß die Verhältniß unverändert bleibt, so kann man die Logarithmen für alle mögliche Progreßionen in ganzen Zahlen gebrauchen.

§. 303. **Zusatz.** Und weil eine gebrochene Zahl durch einen negativen Exponenten ausgedruckt wird, so kann man auch für die rückwarts fortgesetzte Reyhe in Brüchen Logarithme finden; dann es sey

$\frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, a^4$ -- so sind die Logar.

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ --

weil $\frac{1}{a^4} = a^{-4}$, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$, $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ u. s. w. nach §. 180.

§. 304. **Anmerk.** Man siehet aus der Benennung, die die ersten Erfinder den Logarithmen gegeben, daß sie nach diesen Begriffen sich gerichtet haben; denn λογων αριθμος heißt die Zahl der Verhältnisse.

§. 305. **Lehrsatz.** Der Logarithme des Products ist die Summe der Logarithme der Factorum, und der Logarithme des Quotienten ist die Differenz der Logarithme vom Dividendus und Divisor. Denn $x^m . x^r = x^{m+r}$, nun ist m der Logarithme von x^m und r der Logarithme vor x^r, also ist die Summe $m + r$ der Exponent, das ist, der Logarithme des Products; ferner $x^{m+r} : x^r = x^{m+r-r} = x^m$; nun ist $m + r$ der Logarithme des Dividendus, r der Logarithme des Divisors, und m der Logarithme des Quotienten; aber m ist die Differenz der beeden Logarithme $m + r$, und r; folglich werden in der Division die Logarithme des Divisors vom Logarithmen des Dividendus abgezogen, was übrig bleibt, ist der Logarithmus des Quotienten.

§. 306. **Lehrsatz.** Weil die Erhebung zu Potenzen durch eine Multiplication des Exponenten

in den gegebenen Grad der Potenz, und die Ausziehung der Wurzel durch eine Division des Exponenten durch den gegebenen Grad der Wurzel geschiehet, die Logarithme aber die Exponenten ausdrucken, so darf man nur im ersten Fall den Logarithmen der Potenz in den gegebenen Grad multipliciren, im letzten Fall aber durch den Logarithmen dividiren.

§. 307. Exempel. Es sey die Reyhe

Geom.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128.
Arithm. oder Logarithm.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.

Man verlangt das Product von 4 . 16, so addirt man die Logarithmen, die den Factoren correspondiren, sie sind 2 und 4, die Summe 6 correspondirt dem Product 64; man verlangt das Product von 8 . 16, so addirt man die correspondirende Logarithmen 3 und 4, der Summe 7 correspondirt das Product 128; ferner, man verlangt den Quotienten von 8 in 128; der Dividendus ist 128, der Divisor 8; des ersten Logarithme 7, des letztern 3; ziehet man nun diesen vom ersten ab, so hat man $7 - 3 = 4$, den Logarithmen des Quotienten, welchem 16 correspondirt. Wie man die Zahlen, die zwischen 2 und 4, 4 und 8, 8 und 16 u. s. w. fallen, und ihre correspondirende Logarithmen suchen, und hernach die Rechnung auf alle nur mögliche Fälle anwenden könne, wollen wir sogleich anführen. Man verlangt die dritte Potenz von 4; der Logarithme von 4 ist 2, dieser mit 3 multiplicirt gibt 6; dem correspondirt die Potenz 64; man verlangt die siebende Potenz von 2; der Logarithme von 2 ist 1, dieser mit 7 multiplicirt gibt 7, welchem die Potenz 128, als die siebende Potenz von 2 correspondirt; Endlich, man verlangt die Cubicwurzel aus 64; der Logarithme von 64 ist 6, dieser durch die Zahl der Wurzel dividirt, gibt den Logarithmen 2, deme die Wurzel 4 correspondirt; also $4 = \sqrt[3]{64}$.

§. 308. Zusatz. Wenn man also in der Buchstabenrechnung den Logarithmen von x^3 geben will, so heißt er $3lx$, der von $x^n = nlx$, der von $x^{n+r} = (n+r)lx$; und wenn man die Logarithmen der Wurzel verlangt, so ist z. E. $\sqrt[4]{x^3} = lx^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}lx$,

$\sqrt[m]{x^m}$

$\sqrt[n]{x^m} = lx^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} lx.$; oder bey der Multiplication der Logarithme von $xy = lx + ly$, der von $xyz = lx + ly + lz$; und bey der Division der Logar. von $\frac{x}{z} = lx - lz$, der von $\frac{x}{y^2} = lx - 2ly$.

§. 309. **Lehrsatz.** Man kann die Logarithmen derjenigen Zahlen, die zwischen die Potenzen hineinfallen, durch Näherung so finden, daß der Fehler nicht merklich ist. Denn es seyen zwo nächste Potenzen x^m und x^{m+1}, man suche die mittlere Proportionalzahl, die wir p nennen wollen, so ist nach §. 273, $p = \sqrt{x^{m+1} x^m} = \sqrt{x^{2m+1}}$ nach §. 176. $= x^{\frac{2m+1}{2}}$ nach § 189. Der Exponent ist also $\frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}$ und eben dieser Exponent ist auch der Logarithme. Will man zwischen diesem und dem vorigen Glied abermal die mittlere Proportionalzahl suchen, so ist sie $\sqrt{x^{m+1} \, x^{\frac{2m+1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{2m+1+m+1}{2}}}$

$= \sqrt{x^{\frac{2m+1+2m+2}{2}}}$ nach §. 155. $= \sqrt{x^{\frac{4m+3}{2}}} = x^{\frac{4m+3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{4m+3}{2}} = x^{m+\frac{3}{4}}$; der Exponent ist also $m + \frac{1}{4}$, und eben dieser Exponent ist auch der Logarithme dieser mittlern Proportionalzahl. Auf diese Weise kommt man dem wahren Ausdruck der dazwischen liegenden Glieder immer näher, doch nie so nahe, daß gar nichts mehr fehlen sollte.

§. 310. **Willk. Satz.** Man hat in den logarithmischen Tabellen die geometrische Reyhe nach der decadischen Progreßion

1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,

angenommen, weil sie die bequemste ist; unerachtet man eine jede andere auch hätte annehmen können. Die Logarithme der dazwischen fallenden Glieder hat man nach obigem §. 309. mit erstaunlicher Mühe in Decimalbrüchen berechnet, aber so, daß nur die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, also von 1 bis 100000, oder unter hundert tausend Zahlen nur sechse sich befinden, die genaue und nach mathematischer Schärfe richtig übereinstimmende Logarithmen haben, unerachtet auf diesen nur beynahe wahren Dingen alle astronomische Rechnungen, und überhaupt, wo nicht der größte, doch der wichtigste Theil der angewandten Mathematik beruhet. Doch sind die Fehler, die wir oben gemeldt, so klein, daß sie sonst nirgend, als bey der geometrischen Genauigkeit, den Namen eines Fehlers verdienen würden. Weil die Logarithmen in zehentheiligen Brüchen gefunden werden, so besteht ein jeder aus einer ganzen Zahl oder statt des Zahlzeichens einer 0, und aus Brüchen; das ganze Zahlzeichen heißt die Characteristik; die Zahlen von 1 bis 10 haben die Characteristik 0, die von 10 bis 100 die Characteristik 1, die von 100 bis 1000 die Characteristik 2 u. s. w.

§. 311. Anmerk. Der weitere Gebrauch der Logarithmen gehört vornemlich in die Trigonometrie, um deren willen sie auch zu Anfang des vorigen Jahrhunderts erfunden worden sind; wir werden dahero die Geschichte davon in der Lehre von der Trigonometrie erst vortragen; im folgenden aber hie und da noch manches einfliessen lassen, was zur gründlichen Wissenschaft derselben besonders aus der höhern Geometrie vorgetragen werden kann; wobey wir auch zeigen werden, warum die Logarithmen zu negativen Grösen unmögliche Logarithmen oder Grösen seyen, wie Herr von Leibnitz gegen Hrn. Bernouille behauptet hat.

Von

Von den Gleichungen.

§. 312. Erklär. Einerley Gröse auf verschiedene Weise ausgedrückt, heißt eine **Gleichung**; z. E. $2 \cdot 7 = 10 + 4$. Die **Glieder** der Gleichung nennt man diejenige Theile, die durch die vier Rechnungsarten und andere Zeichen zusammen hangen.

§. 313. Zusatz. Nach den Grundsätzen §. 23. bleibt die Gleichung unverändert, man mag beederseits Gleiches addiren, subtrahiren, mit Gleichem multipliciren oder dividiren, gleiche Potenzen setzen, oder gleiche Wurzeln ausziehen, die Zeichen beederseits verändern, oder auch durch die Addition und Subtraction auf einer Seite endlich die Gleichung auf nichts bringen.

§. 314. Anmerk. Diese leichte Kunst läßt sich am besten durch Exempel erläutern. Es seye

I. $3a - x = b$
$x = x$ add.
$3a = b + x$
$b = b$ subtr.
$3a - b = x.$

II. $ax = b$: a
$x = \frac{b}{a}$

III. $\frac{x}{b} = a$. b
$x = ab$

IV. $\sqrt{x} = ab$ quadr.
$x = a^2b^2$

V. $x^2 = a$ $\sqrt{}$ extr.
$x = \sqrt{a}$

VI. $a^2 - bx = c$
$c = c$ subtr.
$a^2 - bx - c = 0$

In diesen sechs Exempeln sind nur die gewöhnlichsten Fälle enthalten, die ein jeder Anfänger schon verstehen kann, wenn er nur den 23. §. sich bekannt gemacht hat. Es gibt aber noch andere Fälle, die nicht so leicht sind, und von denen wir auch im folgenden reden werden. Uebrigens heißt diese in der That leichte Kunst insgemein die Algebra.

§. 315. Erklär. Eine einfache Gleichung ist, in welcher die unbekannte Gröse, wie x oder y, nur

nur in der ersten Potenz oder Dignität sich findet.

§. 316. **Zusatz.** Eine einfache Gleichung ist also leicht aufzulösen; man nehme das VI. Exempel §. 314.

$a^2 - bx - c = o$ .. so ist, wenn man bx beederseits addirt, die unbekannte Gröse bald gefunden.

$bx = bx$

$a^2 - c = bx$

$\frac{}{} : b$

$\frac{a^2 - c}{b} = x.$

Die ganze Kunst besteht darinnen, daß man alle bekannte Glieder auf eine Seite schafft, damit das unbekannte Glied auf der andern Seite allein bleibe.

§. 317. **Zusatz.** Es können in einer einfachen Gleichung auch mehr unbekannte Grösen sich finden, nur darf keine mit der andern multiplicirt werden, weil sonst, bey der Auflösung selbst, Gleichungen herauskommen würden, die nicht mehr einfach sind.

§. 318. **Anmerk.** Man soll z. E. zwo Zahlen finden, deren Summe und Differenz gegeben ist, das ist, wenn die gesuchte Zahlen x und y, ihre Summe a, und ihre Differenz b ist, so ist $x + y = a$, und $x - y = b$. Nun rechne man nach den Grundsätzen §. 23.

$x + y = a$
$x - y = b$
addirt
$\frac{}{} : 2$
$2x = a + b$
$x = \frac{a + b}{2}$

$x + y = a$
$x - y = b.$
$- +$ subtrahirt
$\frac{}{} : 2$
$2y = a - b.$
$y = \frac{a - b}{2}$

Die gröfere Zahl x ist also die halbe Summe zur halben Differenz addirt, die kleinere y die halbe Differenz von der halben Sum-

Summe subtrahirt. Man siehet aus diesen und andern Exempeln zur Genüge, daß man zwar allgemeine Regeln zum Rechnen geben kann, bey der Ausübung aber das meiste auf den Verstand und auf den Witz des Rechners ankommt; daherv man neben dem Fleiß natürliche Gaben besitzen muß, wenn man in der Mathematik, wie in andern Wissenschaften, groß werden will. Das gegebene Exempel könnte auch auf eine andere Weise, die aber ungleich langweiliger und verdrießlicher ist, berechnet werden; wie solches in den Wolfischen Anfangsgr. der Trigonom. zu sehen; die hier vorgetragene Rechnung haben Gravesand und Newton gegeben. Das Exempel selbst wählten wir deßwegen, weil es im folgenden, besonders in der Trigonometrie, genutzet werden soll.

Von den quadratischen sowohl reinen als unreinen Gleichungen.

§. 319. **Erklär.** Eine **quadratische Gleichung** ist, in welcher die unbekannte höchste Potenz ein Quadrat ist; Sie ist **rein**, wenn die höchste unbekannte Potenz als ein Quadrat allein vorkommt; z. E. $x^2 = a$, oder $3x^2 = b$, folglich $x^2 = \frac{b}{3}$; hingegen wird sie **unrein**, oder (æquatio quadratica affecta sive impura) genannt, wenn noch eine niedrigere Potenz der unbekannten Gröse in der Gleichung vorkommt; z. E. $x^2 + mx = g$, oder $z^2 + z = a$.

§. 320. **Zusatz.** Weil eine reine quadratische Gleichung $x^2 = b$, und $x^2 = +x \cdot +x$ oder $= -x \cdot -x$ seyn kann, nach §. 209. so ist $x = +$ oder $- \sqrt{b}$; welches man ausdruckt $x = \pm \sqrt{b}$. Die Erklärung von reinen und unreinen Gleichungen gilt von allen auch höhern Gleichungen; so ist $x^3 - ab = o$ eine reine cubische Gleichung; hingegen $x^3 - ax + b = o$ eine unreine, oder wie man sonst sagt, æquatio affecta.

§. 321. Lehrsatz. Eine jede unreine quadratische Gleichung läßt sich auflösen, wenn man den Coefficienten der ungleich niedern Potenz halbirt, und das Quadrat dieser Hälfte beederseits addirt, hernach die Wurzel aus der Gleichung auszieht. Denn entweder hat das Quadrat einen Coefficienten oder nicht; hat es einen, so kann man ihn durch die Division wegbringen, hat es aber keinen Coefficienten, so ist die Regel von sich selbst klar. Denn der allgemeine Ausdruck ist

I. $x^2 - mx = g$

$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$ add.

$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + g$ $\surd$ extr.

$x - \frac{1}{2}m = \pm\surd(\frac{1}{4}m^2 + g)$

$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m$ add.

$x = \frac{1}{2}m \pm \surd(\frac{1}{4}m^2 + g)$

II. $x^2 + mx = g$.

$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$ add.

$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + g$ $\surd$ extr.

$x + \frac{1}{2}m = \pm\surd(\frac{1}{4}m^2 + g)$

$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m$ subtr.

$x = -\frac{1}{2}m \pm \surd(\frac{1}{4}m^2 + g)$

§. 322. Zusatz. Wenn der Coefficient der nächst niedern Potenz $= 1$, so addirt man beederseits $\frac{1}{4}$, weil die Hälfte von $1 = \frac{1}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{1}{4}$, z. E.

$z^2 - z = b$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$z^2 - z + \frac{1}{4} = b + \frac{1}{4}$. $\surd$ extr.

$z - \frac{1}{2} = \pm\surd b + \frac{1}{4}$ und

$z = \frac{1}{2} \pm \surd b + \frac{1}{4}$.

wo bey z der Coefficient 1, ob er schon nicht ausgedruckt wird, zu verstehen ist.

§. 323. Zusatz. Ist der Coefficient von z oder der einfachen Potenz ein Bruch, so verfährt man wie-

wieder nach der Regel; und addirt beederseits das Quadrat des halbirten Bruchs.

$z^2 - \frac{1}{3}z = z$, nun ist $\frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ und sein Quadr. $\frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ addirt

$z^2 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{36} = a + \frac{1}{36}$: √ extr.

$z - \frac{1}{6} = \pm\sqrt{(a + \frac{1}{36})}$ und

$z = \frac{1}{6} \pm \sqrt{(a + \frac{1}{36})}$

§. 324. Anmerk. Diese quadratische Gleichungen, besonders die sogenannte affectæ oder unreine Gleichungen sind von grosem Nutzen, dahero man sich solche wohl bekannt machen soll; wir wollen ein Exempel geben, wo man alle bisherige Sätze von den Gleichungen allesamt anbringen kann. Man solle zwo Zahlen suchen, deren Summen, Product, und Differenz der Quadrate gleich oder einerley sind; die Zahlen seyen x oder y, so ist nach der Forderung,

Nr. I. $x + y = xy$

$x^2 - y^2 = xy$

$x + y = x^2 - y^2$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ nach §. 147.

$x + y = (x - y)(x + y)$: $x + y$

$1 = x - y$

$y = y$ add.

Nr. II. $1 + y = x$

$y = y$

Nr. III. $1 + 2y = x + y$

$x + y = xy$ nach nr. I.

$1 + 2y = xy$

$x = 1 + y$ nach nr. II. diß substituirt gibt

$1 + 2y = y(1 + y)$

$y(1 + y) = y + y^2$

$1 + 2y$

$$1 + 2y = y + y^2$$
$$y = y \quad \text{subtrah.}$$
$$1 + y = y^2$$
$$y = y \quad \text{subtrah.}$$
$$1 = y^2 - y \quad \text{eine quadratische unreine Gleichung.}$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \quad \text{add.}$$
$$1 + \tfrac{1}{4} = y^2 - y + \tfrac{1}{4}$$
$$\pm\sqrt{(1 + \tfrac{1}{4})} = y - \tfrac{1}{2} \text{ und } \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4})} = y.$$

und nach nr. II. ist $1 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(1 + \frac{1}{4})} = x$.

Von höhern Gleichungen überhaupt.

§. 325. Erklär. Bey den höhern Gleichungen, das ist bey solchen, wo die höchste Potenz der unbekannten Gröse über das Quadrat hinauf steiget, hat man, in sofern sie als bestimmte Gleichungen, oder als solche, in welchen nur eine unbekannte Gröse, obschon in verschiedenen Potenzen vorhanden ist, überhaupt betrachtet werden, vornemlich darauf zu sehen, daß man die Gleichung in eine geschickte Ordnung bringt; das ist, die höchste Potenzen ohne alle Coefficienten zuerst setzet, sodann die unmittelbar folgende, u. s. w. auch diejenige, welche fehlen, und die man als Potenzen ansiehet, deren Coefficient null, oder die in eine o multiplicirt sind, genau bemerkt u. s. w.

§. 326. Zusatz. Diese Ordnung der Potenzen läßt sich aus dem 23. §. abermal begreiffen; denn wenn die unbekannte größte Potenz mit einer andern Gröse dividirt ist, so bringt man den Divisor durch die Multiplication hinweg, ist sie multiplicirt,

so

so bringt man den Multiplicator oder Coefficienten durch die Division hinweg; u. s. w. Die Coefficienten, die in einerley Potenz multiplicirt sind, werden als Factores dieser Potenz zusammengesetzt oder untereinander geschrieben, damit die Potenz mit ihren Coefficienten als ein einiges Glied angesehen werde; und damit die höchste Potenz das Zeichen + bekomme, wenn sie vorher — hat, so kann man es abermal nach §. 23. die Veränderung, der Gleichung unbeschadet, bewerkstelligen, und sie selbst zuletzt auf nichts reduciren u. s. w.

§. 327. Erläuter. Ein Exempel wird die Sache deutlich machen; man gibt einem die Gleichung, man solle sie ordnen:

$$a - mz = \frac{z}{z^3 - e} + \frac{c}{z^2}$$

man multiplicirt zuerst beederseits mit $z^3 - e$,

$$\text{---------------------} \cdot z^3 - e$$

so hat man

$$az^3 - mz^4 ae + mez = z + \frac{cz^3 - ec}{z^3}$$

man multiplicire ferner mit z^2,

$$\text{---------------------} \cdot z^2$$

so hat man

$$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = z^3 + cz^3 - ec$$

man bringe die gleiche Potenzen mez^3, z^3, und cz^3 zusammen auf eine Seite;

$$z^3 + cz^3 = z^3 + cz^3 \text{ subtr.}$$

$$az^5 - mz^6 - acz^2 + mez^3 - z^3 - cz^3 = -ec$$

man drucke die Coefficienten der gleichen Potenz z^3 schicklicher aus, u. substituire den Ausdruck.

$$mez^3 - z^3 - cz^3 = (me - 1 - c)z^3$$

$$az^5 - mz^6 - acz^2 + (me - 1 - c)z^3 = -ec$$

weil mz^6 die höchste Potenz, so dividire man alles mit

$$\frac{az^5}{m} - z^6 - \frac{acz^2}{m} + \frac{(me-1-c)z^3}{m} = -\frac{ec}{m} \quad : m$$

$$z^6 - \frac{az^5}{m} - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{acz^2}{m} = \frac{ec}{m}$$

$$\frac{ec}{m} = \frac{ec}{m} \text{ subtr.}$$

$$z^6 - \frac{az^5}{m} - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{acz^2}{m} - \frac{ec}{m} = 0$$

$$z^6 - \frac{az^5}{m}* - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{acz^2}{m}* - \frac{ec}{m} = 0$$

mit m, damit man z^6 ohne Coefficienten allein bekomme; man verändere die Zeichen, daß man $-z^6$ positiv bekomme; und setze z^6 zuerst und so fort nach der Ordnung der Potenze.

man bringe die Gleichung auf nichts.

Man zeige die fehlende Glieder zwischen z^5 und z^3 u. s. w. durch Sternlein an.

so hat man die Gleichung richtig geordnet, und das ganze Geschäfte ist größtentheils nach den ersten Regeln der Mathematik §. 23. vollendet, dahero nur übrig bleibt, daß man die Wurzel suchet, davon wir sogleich reden werden.

§. 329. Anmerk. Wenn einer im Rechnen geübt ist, und gleich überschauen kann, wie sich Grösen durch die Division, Multiplication u. s. w. aufheben lassen, so kann er eine Gleichung ohne diese Regeln schnell ordnen, z. E. es sey

$ax = \frac{b^2x - b^3}{z}$, fällt nun einem gleich ein, daß $b^2x - b^3 = b^2(x-b)$ so hat man schon die andere schickliche Gleichung.

$ax = \frac{b^2(x-b)}{z}$ Es sey ferner

$x = \frac{az}{x-b}$ so ist, wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt

$axx = \frac{ab^2z(x-b)}{z(x-b)}$ das ist

$axx = ab^2$ und $xx = bb$, folglich $x = b$.

Von

Von den Wurzeln der zusammengesetzten Gleichungen.

§. 330. Erklär. Die Wurzel einer Gleichung, die auf Null gebracht ist, heißt dasjenige, was für die unbekannte Gröse so gesetzt werden kann, daß die Gleichung nach der Hand wieder Null bleibt; oder wodurch sich alle Glieder aufheben und zusammen o werden. Das was man für die unbekannte Gröse z oder x setzet, mag hernach eine mögliche oder unmögliche Gröse seyn.

§. 331. Lehrsatz. Eine jede Gleichung hat so viel Wurzeln, als der Exponent der höchsten Potenz Einheiten hat, oder wie man sonst spricht, als die höchste Potenz Abmessungen hat.

Beweis.

Eine jede quadratische Gleichung hat 2 Wurzeln, dann von x^2 kann $+x$ und $-x$ die Wurzel seyn; also hat sie so viel Wurzeln als sie Abmessungen hat. Bey einer cubischen Gleichung kann man es ebenfalls zeigen; denn man setze

$x-a=0$ oder $x-2=0$

$x-b=0$ $x-3=0$

---

so ist $x^2-(a+b)x+ab=0$ $x^2-5x+6=0$

$x-4=0$

es sey ferner $x-c=0$ so ist $x^3-9x^2+26x-24=0$

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$.

Da man nun für x setzen kann a, b, c, oder in Zahlen 2, 3, 4, und die Gleichung dennoch null bleibt, so hat die Gleichung drey Wurzeln; eben so beweißt man es bey der vierten Potenz, daß vier Wurzeln herauskommen.

§. 332.

§. 332. **Zusatz.** Das letzte Glied der Gleichung ist das Product der Wurzeln: denn a b c ist das Product aus den Wurzeln a, b, c; wie 24 das Product von 2 . 3 . 4. Die Coefficienten des zweyten Glieds sind die Summe aller Wurzeln, die Coefficienten des dritten Glieds die Summen der Producte aus je zwo und zwo Wurzeln u. s. w. **Harriot** hat noch bemerkt, daß, so viel wahre Wurzeln einer Gleichung sind, als unmittelbare Abwechslungen der Zeichen + und — vorhanden; welche Regel nachgehends Herr Geh. Rath von **Segner** bewiesen hat.

§. 333. **Anmerk.** Die Sache läßt sich auch durch eine reine Gleichung erläutern; es sey die dritte Potenz von 2 gegeben, welche 8 ist, folglich ist $x^3 - 8 = 0$, und weil 2 die Cubicwurzel aus 8, so ist $x - 2$ auch 0. Man dividire nun $x^3 - 8$ durch die Wurzel $x - 2$, so ist

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 8 & x^2 + 2x + 4 \\ (x - 2) & \\ x^3 - 2x^2 & \\ - \quad + & \\ \hline + 2x^2 - 8 & \\ (x - 2) & \\ 2x^2 - 4x & \\ - \quad + & \\ \hline + 4x - 8 & \\ (x - 2) & \\ 4x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

dieser Quotient ist = 0, weil 0 mit 0 dividirt nothwendig = 0, folglich ist

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$3 = 3$ subtr.

$x^2 + 2x + 1 = -3$

$\sqrt{}$ extr.

$x + 1 = \mp\sqrt{-3}$

$1 = 1$ subtr.

$x = -1 \mp \sqrt{-3}$, welches die zwo übrige Wurzeln von 8 sind, ausser der positiven 2.

Denn wenn man $-1 + \sqrt{-3}$ mit sich selbst dreymal multiplicirt, so ist $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$, wie $2^3 = 8$; eben so ist auch $-(1 - \sqrt{-3})^3 = 8$.

§. 334. Zusatz. Weil eine jede eingebildete oder unmögliche Wurzel als eine Quadratwurzel angesehen werden kann, §. 212. eine solche Wurzel aber jedesmal + und — zum Zeichen hat, so gehen die eingebildete Wurzeln paarweis; das ist, wo eine ist, ist auch die andere, wo drey auch die vierte, wo fünf auch die sechste, sie können dahero niemalen in ungerader Zahl vorhanden seyn.

§. 335. Zusatz. Eine jede reine Gleichung, nach §. 320. sie mag so viel Abmessungen haben als sie will, hat nur eine wahre mögliche Wurzel, wenn der Exponent ungerade ist, und zwo entgegengesetzte gleiche mögliche Wurzeln, wenn er gerade ist; die übrige sind alle eingebildet oder unmöglich.

§. 336. Zusatz. Wenn man eins durch die Wurzel aus minus eins dividirt, so hat man die negative Wurzel aus minus eins; das ist $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, denn $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ folglich durch Veränderung der Zeichen $-\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = +1 : \sqrt{-1}$

$-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ ein gleichgültiger Ausdruck, der mehrmalen vorkommt.

Die Erfindung der Wurzeln und der Divisorum einer Gleichung.

§. 337. Lehrsatz. Weil das letzte Glied das Product der Wurzel ist, so darf man es nur in seine Factores zerfällen, und einen jeden Factor in die Stelle der unbekannten Gröse setzen, damit man sehe, ob durch diese Substitution die Gleichung null

werde; denn in diesem Fall ist der Factor eine wahre Wurzel. Wird aber die Gleichung nicht null, so nimmt man einen andern Factor, und versucht die Substitutionen so lange, bis die Gleichung null wird.

§. 338. **Zusatz.** Wenn das letzte Glied ein kleines Product ist, so kann man die Wurzeln eher finden; ist es aber ein groses Product, das viele Factores hat, so wird das Geschäfft weitläuftig.

§. 339. **Anmerk.** Man hat dahero noch verschiedene Methoden ie und je erfunden, die aber alle anzuführen, zu weitläuftig wären; uns genüget, die Möglichkeit gezeigt zu haben, wie diese Arbeit verrichtet werden kann; doch wollen wir noch einige nennen.

§. 340. **Lehrsatz.** Man kann die Wurzeln schneller finden, wenn man vorher ihre Schranken oder Grenzen bestimmt, zwischen welche sie hinein fallen. Die Schranken aber werden durch die Regeln der Gleichungen nach §. 23. bestimmt. z. E. es seye

$x^2 - 8x + 15 = 0$ so ist $x^2 - qx + r = 0$

$x^2 + 15 = 8x$ und $x^2 + r = qx$

$x^2 < 8x$ $x^2 < qx$

$: x$ $: x$

$x < 8$ ferner weil $x < q$ ferner weil

$x^2 + 15 = 8x$ so ist $x^2 + r = qx$ so ist

$15 < 8x$ $r < qx$

$: x$ und $: q$ und

$\frac{15}{8} < x$ folgl. sind $\frac{15}{8}$ und 8 die Grenzen der Wurzel $r < x$: also sind $\frac{r}{q}$ und q die Grenzen.

§. 341. **Zusatz.** Wenn die Gleichungen cubisch sind, so kann man die Schranken eben so finden:

Es sey der allgemeine Ausdruck der cubischen Gleichung, weil das zweyte Glied jedesmal nach §. 147. kann weggeschafft werden,

$x^3 - qx + r = 0$

$x^3 + r = qx$

$x^3 < qx$: x

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

ferner weil $x^3 + r = qx$ so ist

$r < qx$: b

$\frac{r}{q} < x$ demnach sind die

Schranken der Wurzel $\sqrt{q}$ und $\frac{r}{q}$; wenn die Gleichung cubisch ist.

§. 342. Lehrsatz. Wenn man eine Gleichung, wie z. E. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat, und man setzt sie einer andern gleich, die, in $x + \alpha$ multiplicirt, eben das geben solle, so kann man die Divisores nach Newtons Manier finden. Denn es sey

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + \alpha)(x^3 + fx^2 + gx + h)$

das ist, wenn man wirkl. multipl. $= x^4 + (f + \alpha)x^3 + (g + \alpha f)x^2 + (h + \alpha g)x + \alpha h$, so kann man die letzte Gleichung vollkommen durch $x + \alpha$ dividiren, man mag für x setzen, was man will, wie der Augenschein es gibt nach den Divisionsregeln §. 152. Da dann

$x = 1$ gibt $1 + a + b + c + d$ und der Divisor $1 + \alpha$

$x = 2$ gibt $16 + 8a + 4b + 2c + d$ — — $2 + \alpha$

$x = 3$ gibt $81 + 27a + 9b + 3c + d$ — — $3 + \alpha$.

Das ist, die Divisores gehen in einer arithmetischen Progression fort.

§. 343. Anmerk. Diese Methode schreibt sich vom Newton her, und heißt Methodus Newtoniana inveniendi divisores æquationum; Herr Clairaut hat diesen einigen fruchtbaren Satz zu Grunde gelegt, und den dritten Theil seiner Algebra darauf gebauet; man wird diesen Theil ganz lesen und verstehen können, wenn man den obigen Lehrsatz versteht. Man sehe auch Herrn Prof. Kies Diluc. anal. Finit. Kæstn. P. I.

Die Veränderung der Gleichungen.

§. 344. Lehrsatz. Man kann bey den Gleichungen die vier Rechnungsarten anbringen, wenn man nur im Substituiren eine Fertigkeit besitzt; welches sich am besten durch Exempel erweisen läßt: Es sey die Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$. Man solle die Wurzel um 3 vermehren und hernach um 2 vermindern, oder man solle die Addition und Subtraction dabey anbringen, so setze man $x + 3 = y$, und hernach $x - 2 = y$.

I. Addition.

$x + 3 = y$
$x = y - 3$

$x^2 = (y-3)(y-3) = y^2 - 6y + 9$
$-5x = -5y + 15$
$+4 = +4$

$x^2 - 5x + 4 = y^2 - 11y + 28$

II. Subtraction.

$x - 2 = y$
$x = y + 2$

$x^2 = y^2 + 4y + 4$
$-5x = -5y - 10$
$+4 = +4$

$x^2 - 5x + 4 = y^2 - y - 2.$

III. Multiplication.

$x^3 + bx^2 + cx + q = 0$

Man soll in dieser Gleichung die Wurzel x in a multipliciren, so ist

nr. I. $ax = y$ und

$x = \frac{y}{a}$ folglich

$x^3 = \frac{y^3}{a^3}$

$bx^2 = \frac{by^2}{a^2}$

$cx = cy$
$q = q$

IV. Division.

$x^3 + bx^2 - cx + r = 0$

Man soll die Wurzel x durch a dividiren, so ist

nr. II. $\frac{x}{a} = y$ und

$x = ay$

$x^3 = a^3y$
$+by^2 = ba^2y^2$
$-cx = -cay$
$+r = +r$

x^3

nr. II. $x^3 + bx^2 - cx + r = a^3y^3 + ba^2y^2 - cay + r = 0$: a^3

$= y^3 + \frac{by^2}{a} - \frac{cy}{a^2} + \frac{r}{a^3} = 0$

nr. I. $x^3 + bx^2 + cx + q = \frac{y^3}{a^3} + \frac{by^2}{a^2} + \frac{cy}{a} + q = 0$ eine Gleichung in welcher $y = \frac{x}{a}$

. a^3

$= y^3 + aby^2 + a^2cy + a^3b = 0.$

eine Gleichung in welcher $y = ax$.

§. 345. **Zusatz.** Eine gegebene Gleichung wird also multiplicirt, wenn man sie durch eine geometrische Progreßion multiplicirt, deren erstes Glied 1 und der Exponent die Zahl ist, durch welche die Gleichung multiplicirt werden soll; und sie wird dividirt, wenn man die gegebene Gleichung durch eine geometrische Proportion dividirt, deren erstes Glied 1 und der Exponent die Zahl ist, wodurch sie dividiret werden soll.

§. 346. **Zusatz.** Weil die fehlende Glieder als Potenzen angesehen werden, deren Coefficienten $= 0$, so muß man sie bey dieser Rechnung nicht vergessen; z. E. man solle $x^3 + cx - q$ durch 2 multipliciren, so setzt man

$x^3 * + cx - q$

1, 2, 4, 8

$x^3 * + 4cx - 8q$ das gesuchte Product.

Oder man solle $x^3 + px - r$ durch drey dividiren, so setzt man $x^3 * + pr - r$

1, 3, 9, 27

$x^3 * + \frac{pr}{9} - \frac{3pr}{27}$

§. 347. **Zusatz.** Fehlet ein Glied, und man möchte es gern wieder herstellen, so darf man nur die Wurzel mit eins vermehren; will man ein Glied hinwegschaffen, so versucht man es entweder durch die Subtraction oder Addition, je nachdem das wegzuschaffende Glied das Zeichen + oder — hat; Brüche bringt man durch die Multiplication hinweg u. s. w. In der Rechnung des Unendlichen wird das weitere vorkommen.

Die Bestimmung der Coefficienten bey Ausdruckungen durch unendliche Reyhen.

§. 348. **Lehrsatz.** Wenn eine Gleichung, die durch eine unendliche Reyhe ausgedruckt wird, lauter Potenzen von z hat, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, und wenn man für z alle mögliche, auch unendlich kleine Grösen, folglich auch null setzen darf, so werden alle ihre Coefficienten null. Denn es sey $o = a + bz + cz^2 + dz^3$ ---
Nun ist nach der Hypoth. $z = o$
folglich $o = a + o + o + o$ ---
also $a = o$.

Es ist aber auch $b = o$, denn $o = bz + cz^2 + cz^3$ ---
$: z$
$o = b + cz + cz^2$ --
$z = o$
$o = b + o + o + o$. also
$b = o$.

Eben so beweißt man, daß $c = o$; u. s. w. bis endlich alle Coefficienten null werden.

§. 349. **Lehrsatz.** Es sey gegeben $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ -- so kann man den Wehrt von

von y durch z ausdrucken, wenn man folgende Reyhe annimmt, und hernach die Coefficienten zu bestimmen sucht.

$y = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5$ — — — folglich

$ay + aAz + aBz^2 + aCz^3 + aDz^4 + aEz^5$

$by^2 = bA^2z^2 + 2bABz^3 + bB^2]z^4 + 2bBCz^5$ — — $= 1]$

$2bAC]$ $b(Az + Bz^2 + Cz^3]^2$

$Cy^3 = cA^3z^3 + 3cABz^4 + 3cB^2Ac^5$ — — $=$

$c(Az + Bz^2 + Cz^3 -)^3$

u. s. w.

$-z = -z.$

Wenn man nun die ganze Reyhe ordnet, nach §. 327. so hat man

$(aA - 1)z + (aB + bA^2)z^2 + (aC + 2bAB + cA^3)z^3$

u. s. w.

Wenn nun $z =$ null gesetzt wird, so sind alle Coefficienten $= 0$, folglich $aA - 1 = 0$, $aB + bA^2 = 0$, $aC + 2bAB + cA^3 = 0$; man kann daher ihren Wehrt bestimmen. Denn

wenn $aA - 1 = 0$, so ist

Nr. I. $aA = 1$, und

$A = \frac{1}{a}$: a

Nr. II. $aB + bA^2 = 0$, folglich

$aB = -bA^2$

$B = -\frac{bA^2}{a}$. a

nun ist $A = \frac{1}{a}$ nach nr. I. also $A^2 = \frac{1}{a^2}$

folglich $B = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2} = -\frac{b}{a^3}$

$aC + 2bAB + cA^3 = 0$

$aC = -2bAB - cA^3$

$C = -\frac{2bAB - cA^3}{a} = \frac{2b^2}{a^5} - \frac{c}{a^4}$ wenn man

man nach Nr. II. und Nr. I. den gefundenen Wehrt von A und B substituirt.

§. 350. **Zusatz.** Dieses Verfahren setzt voraus, daß man die Exponenten der gesuchten Progreßion schon wisse, weil sonst in den Coefficienten Widersprüche erfolgen würden. Die Exponenten von der unbekannten Gröse heißt man hier die Formain Seriei, die **Gestalt** der Reyhe oder Progression.

§. 351. **Anmerk.** Wenn man z. E. die Quadratwurzel von $1+x$ durch eine unendliche Reyhe suchen will, so setzt man, wie oben,

$\sqrt{1+x} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ — — folglich

$1+x = 1 + 2Ax + (A^2+2B)x^2 + (2AB+2C)x^3 + (B^2+2AC+2D)x^4$

$1+x = 1+x$ subtr.

$0 = 0 + (2A-1)x + (A^2+2B)x^2 + (2AB+2C)x^3$ — — —

Daher ist $2A - 1 = 0$ $\quad A^2 + 2B = 0$ $\quad 2AB + 2C = 0$

$2A = 1$ $\quad A^2 = -2B$ $\quad 2AB = -2C$

$A = \frac{1}{2}$ $\quad A^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\quad 2AB = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} = -2B$ $\quad -\frac{1}{8} = -2C$

$\frac{1}{4} : -2 = -\frac{1}{8} = B.$ $\quad -\frac{1}{8} : -2 = \frac{1}{16} = C$ u. s. f.

Wäre nun die Gestalt der Reyhe nicht richtig angenommen, z. E. wenn man die Reyhe $1 + Ax + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}}$ — — nähme, so würde das Quadrat seyn $1 + 2Ax + 2Bx^{\frac{3}{2}} + A^2x^2 + (2AB+2AC)x^{\frac{5}{2}}$. folglich, um die Gleichung auf null zu bringen, $1+x$ subtrahirt

gibt $0 = 0 + (2A-1)x + 2Bx^{\frac{3}{2}} + A^2x^2$ — — —

also $2A - 1 = 0$ II. $2B = 0$ III. $A^2 = 0$

Nr I. $2A = 1$ $\quad$ $\frac{\quad}{\quad} : a$ $\quad A = 0$ welches Nr. I. widerspricht, wo $A = \frac{1}{2}$ gefunden wird, dahero A niemal o werden kann; folglich ist in diesem letztern Fall die Gestalt der Reyhe unrichtig angenommen worden; und man muß eine andere suchen.

$\frac{\quad}{\quad} : 2$ $\quad B = 0$

$A = \frac{1}{2}$

§. 352. Anmerk. Man hat verschiedene Methoden je und je erfunden, die Gestalt der Reyhen sicher zu bestimmen, damit man nicht auf gerathewohl rechnen dörfe. Die erste ist die Newtonische, da man durch Hülfe eines Parallelogramms, in dessen Verticalfächer man die steigende Potenzen von der einen, in die Horizontalfächer aber die steigende Potenzen der andern unbekannte Gröse schreibt. Ist nun z unendlich klein, so wird z^2, z^3 u. s. w. noch unendlichmal kleiner werden, oder verschwinden; das ist, die obere Glieder werden in Ansehung der untern verschwinden; weil die Potenz eines unendlich kleinen Bruchs unendlichmal kleiner als die Wurzel ist. Eben so wenn z unendlich groß ist, so werden die untere Glieder dagegen verschwinden; weil die Potenz einer unendlich grosen Gröse unendlichmal gröser ist als die Wurzel; diejenige Glieder endlich werden gleichnamig seyn, die wie z^3 und zy^3 oder wie zy^3 und z^3 u. s. w. beschaffen sind. Wenn man nun eine Linie von z^3 nach zy^3 ziehet, so werden nur z^3 und zy^3 durch den Mittelpunkt des Fachs von der Linie geschnitten, die übrige Glieder z^2y und z^2y^2, werden auf beeden Seiten von der Linie entweder oben oder unten vorbeygegangen werden, und also entweder unendlich groß oder unendlich klein heissen, folglich wegbleiben können. Es seye z. E. die Aequation $a + bx^2 + cxy + dy^2 + ex^3 + fx^5$, $+ gx^3y^2 + hxy^4 + ix^6y + kx^5y^3 + lx^4y^4 + mx^2y^6 + nx^4y^5$ gegeben, so wird sie folgender Gestalt geordnet:

z^3.	z^3y	z^3y^2	z^3y^3	
z^2	z^2y	z^2y^2	z^2y^3	
z	zy	zy^2	zy^3	
1	y	y^2	y^3	

	x^6y				
x^5 {		x^5y^3			
			x^4y^4	x^4y^5	
x^3		x^3y^2			
x^2					x^2y^6
	xy		xy^4		
1		y^2			

wo man im Parallelogramm die Coefficienten wegläßt, u. nur die Potenzen in ihrer Ordnung setzt. Wenn nun x unendlich klein, und man verlangt den Wehrt von y, so betrachtet man die untere Glieder, da dann entweder $a + dy^2 = 0$; und daraus $y = \sqrt{-\frac{a}{d}}$ gefunden

den wird; oder man ziehet von y^2 die Linie nach y^6, so hat man $dy^2 + hxy^4 + mx^2y^6 = 0$, woraus y gesuchet wird, damit man die Gestalt der Reyhe bekomme; man sehe hievon unsers berühmten Hrn. Prof. Kies Dilucid. Kæstner. Anal. p. 35. 36. wo alles dieses deutlich auseinander gesetzt und mit Exempeln belegt wird, unter welchen das gegenwärtige auch vorkommt. Unter seiner Direction gaben auch Herr M. Holland und Herr M. Pfeiffer im J. 1766, jener eine teutsche, dieser eine lateinische Abhandlung vom Newtonischen Parallelogramm allhier in Tübingen heraus, worinnen die ganze Lehre deutlich und ausführlich vorgetragen wird.

§. 353. Anmerk. Herr Prof. Kästner hat die Sache unter den Teutschen vorzüglich bekannt gemacht; theils in seinen Anfangsgründen Th. II. theils vorhero schon in zwo besondern Dissert. die er zu Leipzig 1743 und 1745 herausgab, unter dem Titel: Æquationum speciosarum resolutio Newtoniana per series, und de resolutione æquationum differentialium per series; welcher zweyten er folgende Innschrift vorgesetzt hat:

Paucula jam series monstrat primordia nascens.
Lege sua partes hæc sine fine regunt;
Sic a vita hominis quam bis sex lustra coercent,
Æva tenent formam non numeranda suam.

Ich würde mich auch durch den Namen eines Compendii nicht haben zurückhalten lassen, diese Lehre ausführlich und nicht nur in etlichen Anmerkungen vorzutragen, wenn es nicht allgemeinere und bessere Methoden gäbe, alle mögliche Reyhen, durch welche eine Gleichung sich auflösen läßt, zu finden, wie die Methode des Herrn Nic. Bernoulli ist, von welcher Herr Prof. Kästner selbst folgendes schreibt: „Diese Methode ist in der That allgemeiner als das Newtonische Parallelogramm; besonders deswegen, weil sie die Exponenten aus den Coefficienten der Differentiale bestimmt; daher sie Reyhen geben kann, wo das Parallelogramm keine gäbe; und selbst wenn sie Reyhen gibt, deren Exponenten mit den Exponenten der Reyhen des Parallelogrammes in einer Progreßion sind, doch diese Reyhen vollständiger, nemlich mit mehr Gliedern gibt, als das Parallelogramm.„ Anal. Infin. p. 424. Die Bernoullische Regel aber läßt sich hier noch nicht vortragen, weil sie die Rechnung des Unendlichen voraussetzt.

Von unbestimmten Aufgaben.

§. 354. Anmerk. Wir wollen mit diesem Titel den Uebergang zur practischen Arithmetik machen, wo ohnehin Aufgaben genug vorkommen, nur muß man wissen, was bestimmte und unbestimmte Aufgaben seyen.

§. 355. Erklär. Eine unbestimmte Aufgabe heißt überhaupt eine Aufgabe, die mehr als eine

Auf-

Auflösung hat; wie eine Frage, auf die man mehr als eine Antwort geben kann. z. E. wenn man zwo Zahlen will, deren Summe = 10, das ist $x + y = 10$; so ist $x = 10 - y$, und ich kann für y setzen was ich will, wenn es nur kleiner ist als 10; man wird x überall finden; z. E. $x = 10 - 4$ oder $10 - 8$ oder $10 - 9$, oder $10 - \frac{1}{2}$ u. s. w. Denn $6 + 4 = 10$, $2 + 8 = 10$, $9 + 1 = 10$, $\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} = 10$ u. s. w.

§. 355. Anmerk. In einer jeden Scienz gibt es solche Aufgaben; z. E. in der Geometrie, wenn man auf die gegebene Grundlinie einen rechtwinklichten Triangel aufrichten; aus dem Innhalt und der Grundlinie ein Dreyeck machen solle; u. s. w.

§. 357. **Zusatz.** Bey Auflösung unbestimmter Aufgaben muß man nur für y solch einen Ausdruck suchen, daß die Gleichung einfach wird.

§. 358. Anmerk. Man solle z. E. ein Quadrat finden, das von einem andern Quadrat abgezogen, wieder ein Quadrat läßt; also $z^2 - x^2 = y^2$; folglich

$y = \sqrt{(z^2 - x^2)}$ man setze dieses gleich $z - px$, weil, wenn man wieder quadrirt, sich z^2 auf beeden Seiten aufhebt;

es sey $y = z - px$

so ist $\sqrt{z^2 - x^2} = z - px$ Dieses quadrirt gibt

$z^2 - x^2 = z^2 - 2pzx + p^2x^2$

$z^2 = z^2$

$-x^2 = -2pzx + p^2x^2$: x

$-x = -2pz + p^2x$ oder welches einerley, wenn man die Wehrte herüber setzt,

$2pz = p^2x + x$ nun ist ferner

$p^2x + x = (p^2 + 1)x$

$2pz = (p^2 + 1)x$: $p^2 + 1$

$\frac{2pz}{p+1} = x$ Wenn man nun für p eine Rationalzahl setzet,

setzet, so bekommt hier x einen Rationalwehrt, woraus man auch für y einen bekommt; z. E. z sey 10, $p = \frac{1}{2}$, so ist $x = 8$ und $y = 6$. Denn $10^2 - 8^2 = 6^2$ oder $100 - 64 = 36$. welches lauter Quadrate sind.

§. 359. Anmerk. Die Absicht der unbestimmten Aufgaben ist diese, daß die gesuchte Grösen hernach rational werden; dahero diese Arbeit besonders eine Uebung für die Alten war, welche die Irrationalgrösen für keine rechte Zahlen hielten, selbige auch um so mehr so viel sie konnten, verhüteten, weil sie die bequeme Art durch die sogenannte Approximation dem Wehrt der Wurzel sich zu nähern nicht hatten, wie wir sie haben. Weil übrigens Diophantus davon, wie wir §. 123. gemeldt, eines und das andere geschrieben, so nennt man die hieher gehörige Kunstgriffe auch die Analysin Diophanteam.

Drit-

Drittes Hauptstück,
Von der practischen Rechenkunst.

§. 360.

Erklärung.

Unter der practischen Rechenkunst versteht man nichts anders, als die Anwendungen der in beeden vorhergehenden Hauptstücken vorgetragenen Lehren und Regeln auf die im menschlichen Leben zu berechnen vorkommende Fälle.

§. 361. **Zusatz.** Man muß daher von den genannten Zahlen, und von der Art und Weise, solche auf die vier Rechnungsarten zu bringen, ferner von der Vergleichung dieser Zahlen nach dem Handel und gesellschaftlichen Leben der Menschen u. s. w. reden, auch zeigen, wie man, so viel möglich, eine Fertigkeit darinnen bekommen solle, damit man das, was man zu rechnen hat, schnell rechnen könne. Ehe wir nun diese Anwendung selbst etwas ausführlicher beweisen, wollen wir nach dem Plan der vorigen Hauptstücke die Geschichte der practischen Rechenkunst vorhero noch kürzlich vortragen.

Geschichte der practischen Rechenkunst.

§. 362. Die practische Rechenkunst ist durch die im menschlichen Handel und Wandel unumgängliche Nothwendigkeit, manches zu berechnen, eingeführet worden, wie die practische Geometrie denen durch

durch die öftere Ueberschwemmungen des Nils abgenöthigten Ausmessungen der Egyptischen Felder, um die Rechte des Eigenthums zu behaupten, ihr Daseyn zu danken hat. Beede Wissenschaften sind also im Anfang, wie fast alle andere Wissenschaften in ihrer Minderjährigkeit es waren, sehr ungekünstelt und nur in so weit brauchbar gewesen, als die Nothwendigkeit der Sache ihre Brauchbarkeit erforderte. Man darf sich dahero nicht wundern, daß die practische Rechenkunst zuerst aufgekommen, indeme wir vielleicht keine theoretische haben würden, wenn jene nicht erst bey häufiger vorkommenden und schwerern Rechnungsfällen die Nothwendigkeit der Theorie desto unentbehrlicher gemacht hätte; man wird sich auch um so weniger darüber wundern, weil man nicht leicht eine Wissenschaft in der Welt nennen kann, die ihr theoretisches Daseyn nicht auf eine solche Weise erhalten hätte.

§. 363. Aus der Geschichte der vergangenen Zeiten hat man die gegründete Vermuthung, daß die erste Handlungsgeschäffte unter den Phönicierн im Schwang giengen. Man darf dahero mit eben so gutem Grunde den Ursprung der practischen Rechenkunst aus Phönicien herleiten, mit welchem man den Ursprung der practischen Geometrie, wie wir hören werden, aus Egypten herzuleiten pflegt.

§. 364. Im Anfang blieb diese Kunst, wie man leicht vermuthen kann, in die engste Schranken eingeschlossen; da aber die Theorie nach und nach hinzukam, so wurden die Schranken erweitert, und man konnte die practische Aufgaben ungleich mehr vervielfältigen.

§. 365.

§. 365. Von der Theorie haben wir das nöthigste in Rucksicht auf die Geschichte bey den vorhergehenden Hauptstücken vorgetragen. Wir nennen dahero gegenwärtig nur diejenige Schriftsteller, welche blos die practische Rechenkunst, ohne Theorie, dergestallten erläutert haben, daß man sie einem gleichsam mechanisch beybringen kann. Hieher gehören nun **Gemma Frisius**, dessen leichte Methode der practischen Arithmetik zu Wittenberg 1544 herauskam; Herr von **Wolf** schreibt von diesem Buch, er habe als ein Knabe noch die ganze practische Rechenkunst, auch die Ausziehung der Wurzeln, ohne Beyhülfe eines Lehrmeisters, allein aus diesem Büchlein, (denn es besteht nur aus eilf Bögen) gelernt; Elem. Math. univ. T. V. P. I. C. II. §. 17. Ferner gehört hieher **Adrian Metius**, der zwey Bücher von der Rechenkunst 1640 zu Copenhagen herausgab; vorzüglich aber unter den Neuern **K. F. de Rees**, ein Holländer, dessen Büchlein von der practischen Rechenkunst 1739 zu Göttingen in das Teutsche übersetzt wurde und im Druck erschien. Er hat alle Aufgaben, die auf der Lehre der Proportionen beruhen, durch eine Regel, die von ihm die **Reesische** heißt, also aufgelößt, daß man ohne alle Theorie blos mechanisch die Sache einem Knaben beybringen kann. Hrn. L. **Wenz** haben wir schon genannt; Unter den neuesten ist auch der verdienstvolle Herr Rector **Stritter** zu Idstein im Nassauischen zu nennen.

§. 366. Anmerk. Die Rechenmaschinen könnte man auch noch hieher zehlen. Dergleichen eine hat Sam. Morland 1671 zu London bekannt gemacht. [illegible]e andere, die noch künstlicher ist, hat Leibnitz schon in [illegible]ugend erfunden. Und noch eine andere, wiewohl nicht so brauchbare, hat Joh. Polenus mit vielem Witz ausgedacht. Der Nutzen von allen besteht darinnen,

daß

daß man durch ihre Hülfe mechanisch addiren und subtrahiren, und ohne das Einmal Eins multipliciren und dividiren kann. Inzwischen ist es doch besser, wenn man die vier Rechnungsarten wohl lernet, weil es nicht fein läßt, wenn man dasjenige, wozu einem GOtt Verstand und Witz verliehen hat, sich gar zu bequem machen will. Eben dieses müssen wir von einigen andern Bemühungen sagen, welche man sonsten in der practischen Arithmetik zu rühmen pflegt. Es sind die Neperische Stäblein, welche übrigens auf eine ungemein witzige Art ausgedacht sind; indeme man durch ihre Beyhülfe, wenn man nur addiren und subtrahiren kann, die größte Zahlen schnell multipliciren und dividiren lernt. Allein man muß besonders bey grossen Zahlen ein halb Hundert solche Stäblein, oder wenigstens etliche Dutzend, immer bey sich tragen, um im Fall einer vorkommenden Rechnung sogleich das verlangte finden zu können. Mich dünkt, es sey besser, die arithmetische Regeln und das Einmal Eins im Kopf, als solche Menge Holz in der Tasche zu haben, wenn man auch in der Ausübung fertig werden will; zur Theorie braucht man sie so nicht. Joh. Neper, ein schottländischer Baron, der sich um die logarithmische Rechnung, davon wir in der Geschichte der Trigonometrie reden werden, ungleich höher verdient gemacht, hat diese Stäblein zu Anfang des vorigen Jahrhunderts erfunden und bekannt gemacht; Sam. Reyher, Prof. der Math. zu Kiel, ahmte ihm nach, und verfertigte ähnliche Sexagenal-Stäblein, die er 1688 bekannt machte, und durch welche die logistische Rechnung erleichtert wird. Die Zeichnungen und Figuren davon lassen sich nicht verständlich genug geben. Man muß sie cörperlich sehen, um einen ganzen Begriff davon zu bekommen. Es ist aber, wie wir schon gemeldet, kein sonderlicher Schade, wenn man sie nie gesehen, und hingegen ein Vortheil für den Verstand, wenn man sich nicht daran gewöhnet hat.

§. 367. Anmerk. Einen Vortheil, dessen man sich aus Noth bedienen muß, und welchen wir ungleich höher halten als die bisherige, können wir nicht ganz übergehen. Wenn einem einer der äusserlichen Sinnen, und besonders der Hauptsinn, nemlich das Gesicht, fehlet, so ist es keine Bequemlichkeit, woferne er solche oder ähnliche Hülfsmittel suchet. Das war der Fall, in welchem der blind gewesene Prof. der Mathem. zu Cambridge, Namens Saunderson, sich befand. Er sah sich durch seine äusserliche Blindheit genöthigt, auf ein Mittel zu sinnen, ohne Augen so schnell und so gut rechnen und calculiren zu können, als mit sehenden Augen. Er setzte also an die Stelle des Gesichts das Gefühl, und versuchte es, ob er nicht mit dem Gefühl obiges bewerkstelligen könnte, was ihm die Abwesenheit des Gesichts versagte. Sein Versuch ist ihm auch nicht mißlungen. Er besteht

steht im folgenden. Statt der neun Zahlzeichen wählte er neun Quadrate oder Vierecke, deren jedes in vier kleinere eingetheilt war, durch welche Eintheilung er neun Durchschnitte des grösfern Quadrats bekam; in welche Durchschnitte er die 9 einfache Zahlzeichen also setzte, daß er in die Mitte des grosen Quadrats eins, gerad oben 2, zur Linken der 2 weiter 3, herabwarts 4 u. s. w. setzte, bis alle neun Zahlen in die Durchschnitte des Quadrats kamen, wie Fig. 2. zeiget. Um nun damit rechnen zu können, ließ er sich für die neun Zahlzeichen neun solche Quadrate machen, davon jedes nur in der ihm angewiesenen Stelle das für diese Stelle gehörige Zahlzeichen enthielte; das zehnte Quadrat war eine Nulle, wo in der Mitte die Nulle befindlich seyn mußte, wovon wir den Grund sogleich einsehen werden. Weil er aber durch das Gefühl rechnete, so ließ er in die 9 Durchschnitte des Quadrats kleine Oeffnungen bohren, daß eine Stecknadel darinnen Platz hatte, die mittelste Oeffnung für die Nulle, wenn kein Eins da war, ließ er etwas gröser bohren, und steckte jedesmal die gröste Stecknadel darein. Wir haben die Sache Fig. 3. ausgedruckt. Wollte er nun eine Zahl durchs Gefühl lesen, oder mit mehrern rechnen, so setzte er seine Quadrate, wie Fig. 4. und kam damit durch die Uebung so schnell zurechte, als wir mit sehenden Augen immer zurechte kommen können. In der angeführten Figur stehen die Zahlen 94084 und 84358 nebst deren Summe 178442, welche man nach den Quadraten setzen und bestimmen kann. Denn weil man nach dem Gefühl aus der grösesten Stecknadel oder Oeffnung in der Mitte auf den Platz jeden Zahlzeichens schliesset, so darf man die kleinere Stecknadel jedesmal nur in ihre durchs Gefühl zu findende Stelle stecken, und hernach die gefundene Zahl aus dem Gefühl aussprechen. Es ist ohne unser Erinnern klar, daß man auf diese Weise alle Rechnungsarten anbringen kann; Herr Saunderson hat seine Manier auch mit vielem Nutzen in der Geometrie gebraucht, und fast alles, was ein sehender Mathematicus leisten kann, damit geleistet; die Methode ist aber nur für natürlich Blinde, die Sehende werden sich keiner solchen Hülfsmittel bedienen, unerachtet sie in der practischen palpablen Arithmetik vor allen andern einen Vorzug verdient, weil sie nicht zur blosen Bequemlichkeit, sondern aus Noth erfunden worden ist. Uebrigens melden wir noch, daß Herr Saunderson, aus der Provinz York gebürtig, im ersten Jahr seines Alters durch die Kindsblattern völlig um das Gesicht gekommen ist. Dem ungeachtet hat sein fähiges Naturell und sein anhaltender Fleiß zu jedermanns Verwunderung es so weit gebracht, daß man ihm die Stelle eines Prof. der Methematik zu Cambridge anvertraute, welche er auch mit grosem Ruhm bekleidete, wie unter andern die in englischer Sprache von ihm aufgesetzte Elemente der Al-

gebra, die 1741. in zween Quartbänden etlich Jahre nach seinem Tod herauskamen, einen hinlänglichen Beweis davon geben.

Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

§. 367. **Erklär.** Genannte Zahlen sind solche Zahlen, denen am Ende der Name ihrer Einheit beygefüget wird. z. E. 5 fl. 6 Thl. 3 gr. 7 kr. u. s. w.

§. 368. **Zusatz.** Weil man nur Zahlen von einer Art oder von einerley Einheit zusammen zehlen kann §. 15, so ist klar, daß man bey Anwendung der vier Rechnungsarten auf die genannte Zahlen, solche Zahlen unter einerley Benennung bringen muß.

§. 369. **Exempel.** Die Sache läßt sich am besten durch Exempel erläutern.

Addition.

5 fl. 30 kr. 5 hl.
2 fl. 50 kr. 3 hl.
40 kr. 1 hl.
9 fl. 1 kr. 3 hl.

Man soll das vorgegebene Exempel addiren; so sagt man, 5 und 3 und 1 hl. geben 9 Heller; weil nun 6 hl. einen kr. machen, so setzt man nur 3 hl. und behält die 6 als eine Einheit der kr. in die nächstfolgende Stelle der kr.; wo es heißt: 30 und 50 geben 80, und 40 dazu, geben 120, und einen kr. behalten, geben 121 kr. das ist, weil 60 kr. einen Gulden machen, folglich 120 = 2 . 60 = 2 fl. zusammen 2 fl. 1 kr. man setzt also 1 kr. in die Stelle der kr. und behält 2 fl. = 120 kr. für die Stellen der Gulden; wo es abermal heißt 5 und 2 geben 7 fl. und 2 behalten geben 9 fl.

Subtraction.

3 fl. 2 kr. 3 hl.
2 fl. 20 kr. 5 hl.
41 kr. 4 hl.

Bey der Subtraction heißt es: 5 hl. von 3 hl. lassen sich nicht abziehen, man entlehnt also aus der Stelle der kr. einen Kreuzer, das ist 6 Heller; diese zu 3 addirt, geben 9 Heller; von neun Heller lassen sich 5 abziehen, der Rest ist 4 hl. Ferner 20 kr. von 1 kr. (weil einer für die

Heller entlehnt wurde) lassen sich nicht abziehen, man entlehnt also aus der Stelle der Gulden 1, daß eine Einheit 60 kr. macht; 20 kr. von 61 kr. lassen 41 kr. endlich 2 fl. von 2 fl. (weil einer für die Stelle der Kreuzer entlehnt wurde) lassen nichts. Also ist der Rest 41 kr. 3 hl.

Multiplication.

2 fl. 23 kr.
3
6 fl. 69 kr.
7 fl. 9 kr.

Wenn man 2 fl. 23 kr. dreymal nehmen solle, so hat man 3 . 23 = 69 = 60 + 9 = 1 fl. + 9 kr.; und 3 . 2 = 6 fl. und 69 kr. ist zusammen addirt 7 fl. + 9 kr.; wo man in dem gegenwärtigen Fall die Gulden nicht zu kr. machen darf.

Division.

3 fl. 20 kr. oder in kr.
60
180 + 20 kr. das ist
200 kr. | 50 kr.
4

Hingegen bey der Division, wenn 3 fl. 20 kr. unter 4 getheilt werden sollen, muß man zuerst alles zu kr. machen, welches durch die Multiplication der Gulden mit 60 geschiehet, zum Product werden die 20 kr. addirt, die Summe 200 wird in 4 dividirt; der Quotient 50 kr. zeigt an, wie viel einer von den vieren bekomme; sollte der Quotient über sechzig sich belaufen, so muß man mit 60 dividiren, der Quotient wird hernach die Gulden bestimmen; und was übrig bleibt, sind kr.

§. 370. **Zusatz.** Es ist klar, daß man bey dieser Rechnung wissen muß, wie viel Heller ein kr., wie viel kr. ein fl. u. s. w. oder im Frucht- und Weinmaß, wie viel Simri ein Scheffel, wie viel Maaß ein Aymer, wie viel Aymer ein Futter u. s. w. halte, welches man hier um so eher voraussetzen darf, als das wirkliche Maaß in einem jeden Land verschieden ist, wie man denn z. E. Geld in Sachsen mit pf. ggr. und Thl., bey uns mit hl. kr. und fl. rechnet u. s. w. dahero man kein gewises Maaß festsetzen kann.

§. 371. **Zusatz.** Wenn einem die Rechnung bey der Subtraction wegen dem Entlehnen beschwerlich ist, so darf man nur nach der Buchstabenrechnung subtrahiren, in welchem Fall man nicht irren

kann, wenn man auch schon nicht weiß, wie viel hl. einen kr., wie viel kr. einen fl. machen u. s. w. Das obige Exempel würde also folgender Gestalt auszuheben;

3 fl. + 2 kr. + 3 hl.
2 fl. + 20 kr. + 5 hl.
— — —
1 fl. — 18 kr. — 2 hl.
das ist + 41 kr. + 4 hl.

wo die Querstriche minus bedeuten.

§. 372. Anmerk. Wenn in einer starken Rechnung viele Brüche vorkommen, die man zu summiren hat, so ist es gut, wenn man schnell den kleinsten Nenner finden kann, weil man sonst viel Zeit und Papier gebraucht, woferne man nach den gewöhnlichen Regeln Fuß vor Fuß rechnen müßte. Es wird aber der kleinste Nenner gefunden, wenn man alle Nenner zusammen auf eine Seite setzt, was sich aufheben läßt, aufhebt, doch so, daß man das, womit man aufhebt, beysetzt, und die übrige Zahlen hernach multiplicirt. z. E. bey Gulden

fl. 360 kleinster Nenner
Nenner. 5.9.8.4.2 aufgehoben mit 4.
kleinste Zehler 5.9.2.2.2. = 360 kleinste Nenner.

2/5 -- 72 --	144
2/9 -- 40 --	80
1/8 -- 45 --	45
3/4 -- 90 --	270
1/2 -- 180 --	180
719/360 —	1 359/360.

Wenn man nun diesen kleinsten Nenner mit jedem Nenner dividirt, und hernach mit dem Zehler wieder multiplicirt, so bekommt man alle kleinste Zehler; z. E. 5 in 360 ist enthalten 72 mal; diß 2mal genommen gibt den Zehler 144; 9 in 360 ist enthalten 40 mal; diß 2mal genommen gibt den Zehler 80; 8 in 360 ist enthalten 45 mal; diß einmal genommen gibt den Zehler 45; 4 in 360 ist enthalten 90 mal; diß dreymal genommen ist 270; 2 in 360 ist enthalten 180 mal, diß einmal genommen ist 180; die einzele Zehler zusammen addirt geben 719/360 = 1 359/360 fl.

§. 373. Anmerk. Wenn man einen Bruch schnell in genannten Zahlen, z. E. den Bruch von Gulden in Kreuzer, u. s. w. brucken will, so hat man nur diese einige Regel zu befolgen:

Man

Man multiplicirt den Zehler des Bruchs in die Anzahl der Einheiten, die auf die gegebene Größe gehen: z. E. bey Gulden wird der Zehler mit 60 multiplicirt, was nach geschehener Division im Quotienten herauskommt, sind Kreuzer, und was übrig bleibt sind Brüche von Kreuzern; da also nach dem vorigen

Exempel $\frac{3}{3}\frac{5}{6}\frac{9}{0}$ fl. $= \frac{359.60}{360}$ kr. $=$ 3(3 / 2x5(4 / 3∅∅ / 3 | ∘ / ∘ | 59 kr. $\frac{3}{3}\frac{4}{6}$ kr.

will man diese $\frac{3}{3}\frac{4}{6}$ kr. zu Heller machen, so multiplicirt man den Zehler mit 6, weil 6 Heller einen kr. geben; $\frac{3}{3}\frac{4}{6}$ kr. $= \frac{34.6}{36}$ hl.

$=$ 2 / 2∅4 / 36 | $5\frac{2}{3}\frac{4}{6}$ hl. $= 5\frac{2}{3}$ hl. wenn man den Bruch mit 6. 2

oder mit 12 aufhebt oder kleiner macht. So sind $\frac{5}{6}$ fl. $= \frac{5.60}{6} =$ 50 kr.; $\frac{11}{12}$ fl. $= \frac{11.60}{12} = \frac{660}{12} =$ 55 kr. u. s. w. Der Grund davon ist die Lehre der Proportion. Der gegebene Nenner verhält sich zu seinem Zehler, wie der neue Nenner (hier der Gulden auf Kreuzer reducirt 60) zum neuen Zehler.

§. 374. Anmerk. Bey weitläuftigen Rechnungen, wo viele Brüche vorkommen, ist es auch gut, wenn man die Brüche durch Decimalfractionen gleichförmig zu machen sucht; wovon §. 80 folg. Denn kürzer und leichter kann die Lehre von Decimalbrüchen nicht vorgetragen werden, als im angeführten §. geschehen.

Von der Regel Detri, sowohl directa als inversa, der zusammengesetzten Regel Detri oder Regel Quinque, Gesellschaftsrechnung, Kettenregel u. s. w.

§. 375. Erklär. Die Regel Detri, oder Regula trium, ist die Regel, aus drey gegebenen Stücken ein viertes, das unbekannt ist, kraft der geometrischen Proportionen zu finden.

§. 376. Zusatz. Die gegebene Stücke müssen also unter sich und mit dem gesuchten in einer

wahren geometrischen Verhältniß stehen; denn sonst läßt sich die Regel nicht anbringen.

§. 377. Anmerk. Wenn man z. E. sagt, in Zeit von einer Stunde lauffen aus dem Boden eines Fasses zween Aymer aus; und glaubt, in drey Stunden werden sechs auslauffen; so irrt man sich: denn die gegebene Dinge stehen in keiner völlig geometrischen Proportion, wie man aus hydrostatischen Gründen weiß; in der ersten Stunde lauft mehr aus als in der zweyten, weil der Druck ungleich ist. Die Erfahrung lehrt eben dieses. Ein volles Faß lauft stärker als ein um die Hälfte leeres. Man muß also die Sachen, die eine geometrische Verhältniß haben, wissen; z. E. Waaren und Preiß; Arbeit und Lohn; Einlage und Gewinnst bey gesellschaftlichen Rechnungen u. s. w. stehen in geometrischer Verhältniß.

§. 378. **Erklär.** Die Regula trium directa heißt, wenn die gleichnamigte Glieder sich auf einander in ihren gehörigen Stellen beziehen, nemlich das erste auf das dritte, das zweyte auf das vierte; z. E. 100 fl. geben 5 Procent, was geben 250 fl. Hingegen ist sie inversa, wenn die Glieder sich nicht in dieser Ordnung auf einander beziehen, sondern versetzt werden müssen, wenn das gesuchte richtig gefunden werden solle; z. E. 100 Soldaten machen eine Schanze in 6 Tagen, wie viel braucht man Soldaten, wenn sie in 2 Tagen fertig werden solle? Man siehet leicht, daß es dreymal so viel seyn müssen; ich darf also nicht setzen 6. T: 100 S = 2 T zu xS. denn da kämen dreymal weniger heraus; sondern ich muß setzen 2 Tag: 6 T. = 100: x, in welchem Fall $x = \frac{600}{2} = 300$ Soldaten.

§. 379. Anmerk. Anfängern fällt es schwer, die Sache jedesmal genau zu unterscheiden, wir wollen dahero die Reesische Rechnung hiebey anzubringen suchen, und solche Regeln geben, dabey auch der schwächste Anfänger nicht irren kann; nur müssen wir vorher noch einige Erklärungen voraussetzen, damit wir die Reesische Rechnung hernach auf alle Fälle anwenden können.

§. 380.

§. 380. Erklär. Die zusammengesetzte Regel Detri, oder Regula trium composita, die auch Regula quinque heißt, lehret solche Aufgaben auflösen, bey welchen man die Regel Detri mehr als einmal anbringt; sie beruhet auf den Gründen, die wir §. 281. folg. vorgetragen haben. z. E. 100 fl. geben in 3 Jahren 15 Procent, was geben 1000 innerhalb 10 Jahren? Wo man erstlich sezt: 100 fl. geben 15 Procent, was geben 1000? (beederseits in 3 Jahren) was herauskommt, nenne man a Procent; dann fährt man zweytens fort, 3 Jahr geben a Procent, was geben 10 Jahr? (beederseits von tausend fl. Capital). Aber auch diese Rechnung wird durch die Reesische Regel erleichtert. Die Kettenregel ist die vorige, aber nur so, daß man die Regel Detri nicht nur 2, sondern 3, 4, 5 und noch mehrmalen dabey anbringt. z. E. Wenn das Fuder Wein 100 fl. kostet, was kostet die Maas? Oder bey Wechselrechnungen, wenn 4 Ducaten 11 Thaler, 2 Thaler 3 fl., 20 gr. einen fl. machen; wie viel Groschen geben einen Ducaten? Die Auflösung gründet sich auf §. 283. Sie läßt sich aber auch durch die Reesische Rechnung mechanisch lernen. Die Gesellschaftsrechnung ist, wenn mehrere zusammen legen, und hernach Gewinnst und Verlust mit einander nach Proportion des Eingelegten theilen. Mit dieser Rechnung ist die Vermischungsrechnung (Regula Alligationis) einerley, wenn man aus der gegebenen Verhältniß der einfachen Materien finden solle, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen Menge der vermischten komme.

§. 381. Anm. Dieses vorausgesetzt, läßt sich nun die Reesische Regel leicht anwenden. Sie ist die folgende: wenn man eine Verticallinie ziehet, und sie unten durch eine Horizontallinie abschneidet, hernach die gegebene Glieder auf beeden Seiten der Verticallinie so setzt, daß beederseits einerley Namen zu stehen kommen, welches sich am besten bewerkstelligen läßt, wenn man mit dem unbekannten Glied anfangt; so sind die Producte der Glieder auf beeden Seiten gleich, und das unbekannte wird gefunden, wenn man durch seinen Coefficienten das Product auf der andern Seite dividirt. Diese Regel wird vielleicht mehr oder eben so viel Deutlichkeit haben, wenn wir sie folgender massen vortragen: Alle Theile einer Gröse, wodurch die Gröse bestimmt oder determinirt wird, setzet man auf einer Seiten der durch sie bestimmten Gröse wechselsweise gegen über; z. E. 600 fl. geben in sechs Jahren 50 fl. Procent, was geben 1600 in 4 Jahren? Die sechshundert Gulden Capital und die Zeit der sechs Jahre, so lang ich sie ausleihe, bestimmen die Gröse des Zinses, a 50 fl. folglich werden 600 fl. u. 6 Jahr als determinirende Gröse auf eine, 50 fl. Zins aber, als die dadurch determinirte Gröse auf die andere Seite gesetzt; eben so 1600 fl. Capital und 4 Jahr Zeit des Ausleyhens bestimmen x fl. Zins; also werden abermal 1600 fl. und 4 Jahr Zeit als determinirende Gröse auf die eine, und die determinirte Gröse x Zins auf die andere Seite gesetzt. Diß ist ein Exempel von der Regel von fünf, oder Regula quinque. Bey der Regula trium inversa pflegt man es eben so zu machen. z. E. 200 Soldaten machen in 24 Tagen eine Schanze, wie viel Soldaten braucht man, wenn die Schanze in 6 Tagen fertig werden solle? Man setzet nach der Regel; Die Zahl der Arbeiter und die Länge der Zeit bestimmen das Werk, folglich werden 200 Soldaten und 24 Tag, so lang sie arbeiten, auf eine Seite als determinirende Umstände, die Schanze als das determinirte Werk, auf die andere

$$\left\{\begin{array}{l|l} 600\text{ fl.} & 50\text{ fl. Zins} \\ 6\text{ Jahr.} & 1600\text{ fl.} \\ x\text{ Zins} & 4\text{ Jahr.} \end{array}\right\}$$

$$600 \cdot 6 \cdot x = 50 \cdot 1600 \cdot 4 \quad \text{und}$$

$$x = \frac{50 \cdot 1600 \cdot 4}{600 \cdot 6} = 88\tfrac{8}{9}\text{ fl.}$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} 200\text{ Sold.} & 1\text{ Sch.} \\ 24\text{ Tag.} & x\text{ Sold.} \\ 1\text{ Schanz} & 6\text{ Tag.} \end{array}\right\}$$

$$200 \cdot 24 = 6 \cdot x$$

$$\text{und } x = \frac{200 \cdot 24}{6} = 800.$$

here Seite gesetzt; eben so die Anzahl der verlangten Soldaten, die in 6 Tagen fertig werden sollen, bestimmen das Werk wieder; man setzet also x Soldaten und 6 Tage auf die andere Seite, und die Schanze herüber, damit nicht auf einer Seite einerley stehe. Oder ein anders Exempel: Wenn acht Ehlen $\frac{9}{4}$ breites Tuch ein Kleid geben, wie viel braucht man Zeug, der nur drey Viertel breit ist? Wo man beederseits den Nenner 4 im Bruch weglassen darf, weil die Benennung einerley ist. Wir wollen noch ein Exempel geben, wo die Zeit mit in die Rechnung kommt.

8 Ehl.	1 Kl.
$\frac{9}{4}$ breit	x Ehl.
1 Kl.	$\frac{3}{4}$ breit.

$$8 \cdot 9 = x \cdot 3 \text{ und}$$

$$\frac{8 \cdot 9}{3} = x = 24 \text{ Ehl.}$$

100 Personen verzehren in 3 Wochen 21 Centner Fleisch, wie viel Personen verzehren in 5 Wochen 63 Centner?

100 Pers.	21 Centn.
3 Woch.	x Pers.
63 Centner	5 Woch.

$$100 \cdot 3 \cdot 63 = 21 \cdot 5 \cdot x$$

$$\frac{100 \cdot 3 \cdot 63}{21 \cdot 5} = x$$ das ist, wenn man beederseits richtig aufhebt,

180 Personen.

Bey der Kettenregel befolgt man eben die Methode. Oder man kann auch die andere gebrauchen, mit dem unbekannten Glied anfangen, und hernach so fortfahren, daß immer das nächstvorhergehende Glied wieder auf die entgegengesetzte Seite zu stehen kommt; z. E. das Fuder Wein (bey uns sechs Aymer) kostet 96 fl. was kostet die Maas (der 160ste Theil vom Aymer)? x kr. kostet die Maas, nun fährt man auf der andern Seite mit der Maas fort, 160 Maas geben den Aymer, man fährt wieder mit dem Namen der Aymer fort; 6 Aymer kosten 96 fl. nun fährt man mit Gulden fort, ein fl. macht 60 kr.; da man dann mit dem Namen aufhört, mit welchem man

x kr.	1 Ms.
160 Ms.	1 Aym.
6 Aym.	96 fl.
1 fl.	60 kr.

$$x \cdot 160 \cdot 6 = 96 \cdot 60$$

$$x = \frac{96 \cdot 60}{160 \cdot 6} = 6 \text{ kr.}$$

angefangen hat. Eben so kann auch die obige Regel berechnet werden: Wie viel Ehlen Zeug oder x Ehlen Zeug geben ein Kleid; ein Kleid braucht sonst 8 Ehlen Tuch; eine Ehle Tuch ist 9 Vrtl. breit, und 3 Vrtl. breit ist die Ehle Zeug; man hört wieder auf, wie man angefangen hat, und das letzte Glied der vorhergehenden Stelle ist allemal das erste der folgenden. Der Grund von dem allem ist §. 283. angezeigt worden.

x Ehlen Z.	1 Kleid
1 Kleid	8 Ehl. T.
1 Ehle T.	9 Vrtl. br.
3 Vrtl. br.	1 Ehl. Z.

$$3 \cdot x = 8 \cdot 9$$

$$x = \frac{8 \cdot 9}{3} = 24.$$

§. 382. Anmerk. Wenn Brüche vorkommen, so werden die Nenner ausgestrichen und wechselsweise auf die entgegengesetzte Seite als ganze Zahlen gebracht. z. E. $\frac{3}{4}$ ℔. kosten $\frac{7}{9}$ fl. was kosten $\frac{6}{13}$ ℔.? Der Grund beruhet auf der Natur der Proportion. Denn wenn man wie §. 116. setzt:

$\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = \frac{6}{13} : x$ so ist $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{13}$ und $x = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{4}{3}$ wie im Exempel.

$\frac{3}{4}$ ℔.	$\frac{7}{9}$ fl.
9*	4
x fl	$\frac{6}{13}$ ℔.
13	

$$3 \cdot 9 \cdot 13 \cdot x = 7 \cdot 4 \cdot 6$$

$$x = \frac{7 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 9 \cdot 13}$$

§. 383. Anm. Man kann auch die Zahlen, die auf beeden Seiten gleich sind, oder durch eine dritte Zahl sich dividiren lassen, kleiner ausdrucken, ein Verfahren, das man die welsche Practik nennt, welche sich auf die bekannte Regel bey den Brüchen gründet, die man aufheben, das ist, kleiner oder mit kleinern Zahlen ausdrucken darf, wenn man den Nenner und Zehler mit einer dritten Zahl dividirt. Nun gibt das Product der einen Columne jedesmal den Zehler, und das Product der andern den Nenner, folglich wenn man auf beeden Seiten mit einer dritten Zahl dividirt, so weit man kann, so thut man weiter nichts, als was man in der Lehre von den Brüchen längstens zu thun gewohnt war. z. E.

Wenn

500 fl. Cap.	200 Zins
10 Jahr	x Cap.
1000 fl. Zins	5 Jahr

Wenn 500 fl. Cap. in 10 Jahren 200 fl. Zins geben, wie groß muß das Cap. seyn, daß man in 5 Jahren 1000 fl. Zins bekomme?

$500.10.1000 = 200.5.x$: 5

Man dividire beederseits mit 5, so hat man:

$100.10.1000 = 200.x$: 100

dieſe Gleichung dividire man wieder mit 100, so hat man:

$10.1000 = 2.x$: 2

die letzte Gleichung dividire man nochmalen mit 2, so bekommt man $x = 5000$; so groß muß das Capital seyn.

§. 384. Anm. Bey der Gesellschaftsrechnung ist es am besten, wenn man die Regel Detri so oft anwendet, als Fälle vorhanden sind. z. E. Drey Kaufleute haben zusammen gelegt:

A	1000 Thl.
B	700
C	900
	2600 Thl. Damit gewonnen 1500 Thl.

was gewinnt ein jeder? Man setzt also dreymal

$2600 : 1500 = 1000 : x$ oder weil die erste Verhältniß mit 100 dividirt werden kann,

$26 : 15 = 1000 : \frac{15.1000}{26} = \frac{15.500}{13} = 576\frac{12}{13}$

$- - \quad 700 : \frac{15.700}{26} = \frac{15.350}{13} = 403\frac{11}{13}$

$- - \quad 900 : \frac{15.900}{26} = \frac{15.450}{13} = 519\frac{3}{13}$

Eben so wird die Vermischungsrechnung behandelt (Regula Alligationis). z. E. Bey gutem Schießpulver gehören auf ein Pfund oder 32 Loth Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel; oder wenn man es halbirt, für ein halb Pf. das ist 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel; wie viel braucht man Salpeter, Schwefel und Kohlen zu 1000 Pf. Pulver? Antwort nach obiger Rechnung $761\frac{9}{11}$ Pf. Salpeter, $142\frac{6}{7}$ Pf. Kohlen, und $95\frac{5}{11}$ Pf. Schwefel.

§. 385.

§. 385. Anmerk. Zu Abkürzung der Rechnungen pflegt man auch je und je die kleinere genannte Zahlen in Divisores der grösern zu verwandeln, und ohne die Reduction hernach zu multipliciren; z. E. eine Ehle kostet 14 fl. 26 kr. 3 hl. was kosten 5428 Ehlen? Man setzet das Exempel folgender Gestalt, und multiplicirt zuerst die obere Zahl durch 14; hernach, ohne noch die Partialprodukte zu addiren, zerfällt man 26 in diejenige summirende Zahlen, durch die sich 60 kr. oder 1 fl. bequem dividiren läßt, sie sind 20 + 6, denn es ist 20 = $\frac{1}{3}$ fl. = $\frac{60}{3}$, und 6 = $\frac{1}{10}$ fl. = $\frac{60}{10}$; daher dividirt man im Sinn die Zahl 5428 zuerst mit 3, hernach mit 10, und setzt die Quotienten; ferner weil 3 hl. = $\frac{1}{2}$ kr. = $\frac{1}{60.2}$ = $\frac{1}{120}$ fl. so dividirt man noch einmal mit 120, oder weil man im Kopf dividirt, mit 60, welches leichter ist; und halbirt hernach den Quotienten; worauf man die Partialprodukte addirt, die Summe ist die Antwort auf die Frage; wenn man aber nicht fertig und geübt im Rechnen, besonders im schnellen Dividiren ist, so wird es besser seyn, wenn man die gewöhnliche Reduction gebraucht.

5428
14 fl. 26 kr. 3 hl.

21712
5428
1809 $\frac{1}{3}$ oder 20 kr.
552 $\frac{8}{10}$ oder 48
45 $\frac{28}{120}$ od. 14

78389 fl. — 22 kr.

§. 386. Anmerk. Diß sind nun die Exempel von allen Gattungen der Regel Detri und der damit verbundenen Regeln, die man in der gemeinen Rechenkunst zu geben pflegt; wir werden aber auch einige höhere Aufgaben, die aus den Gleichungen gerechnet werden, vorlegen.

Von höhern Aufgaben der practischen Rechenkunst.

§. 387. Die bisher vorgetragene Aufgaben gehören zur practischen Rechenkunst; wenn man aber in den gewöhnlichen Rechenbüchern, in welchen die Buchstabenrechnung mit dem, was dazu gehört, gar nicht vorgetragen wird, dennoch höhere Aufgaben anbringen, und ich weiß nicht was für Regulas

Coeci,

Coeci, Falsi, u. s. w. den Lehrlingen, als was sonderbares, ohne weitere Anleitung empfehlen will, so geht man Umwege:

Z. E. Man solle 100 so theilen, daß der erste Theil dreymal so groß als der andere, und der andere zweymal so groß als der dritte werde. Man setze, der kleinste Theil sey 2, so ist der folgende 3.2 = 6, und der dritte 2.6 = 12. Nun ist 2 + 6 + 12 = 20; und nicht 100; folglich das angenommene falsch: doch wird sich 100 zu dem kleinsten Theil verhalten, wie 20 zu seinem kleinsten Theil. Das ist 20 : 2 = 100 : $\frac{2.100}{20}$ = 10. Das wird der gesuchte Theil nach der Reg. Falsi seyn. Allein algebraisch ist das Exempel so leicht als kurz folgendermassen eingerichtet: x + 3x + 6x = 100, das ist 10x = 100, und $\frac{100}{10}$ = x = 10. Dahero keine solche Umwege, wie oben, nöthig sind.

§. 388. In der gegenwärtigen Lehre von höhern Aufgaben werde ich solche Exempel wählen, bey denen ich jedesmal auf die im zweyten Hauptstück gegebene allgemeine Auflösungen den Leser verweisen darf. Nur muß ich eines voraus melden, daß der Verstand bey der ersten Setzung des Problems das meiste thun müsse, wenn man die vorkommende Aufgaben richtig auflösen wolle. Denn unsere Absicht ist, besonders solche Exempel zu geben, welche mit Umständen, die man weglassen kann und soll, verbunden sind; wodurch zugleich der Verstand geschärfet wird, aus individuellen Begriffen höhere und allgemeinere zu abstrahiren.

§. 389. Die ganze Kunst bey höhern Aufgaben besteht darinnen, daß man den ersten Satz richtig ausdrücke, oder das Problem verstehe und hernach richtig setze; denn wenn der erste Satz richtig ausgedruckt ist, so darf man in den folgenden Sätzen nur calculiren, welches eben keine so grose Kunst ist. Ich will das Exempel, das ich in meinen Anfangsgründen aller mathemat. Wissenschaften 1759. I. Th. §. 128. angeführt, und das zu dem Ende vom Newton schon vorgetragen wurde, auch hier wieder zu Grund legen,

legen, damit man sehe, wie man ein Problem in Worten und in Zeichen recht ausdrucken, und was für Umstände man weglassen könne.

Exempel.

Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahr zur Erhaltung seiner Familie 100 Pf. Sterl. davon weg; und wird nach drey Jahren noch einmal so reich, als er anfänglich war: wie viel hat er also Vermögen?

I. Ausdruck in Worten.	II. Ausdruck in Zeichen.
1) Ein Kaufmann besitzt ein gewisses Vermögen,	x
2) wovon er das erste Jahr 100 Pf. Sterl. braucht;	$x - 100$
3) den Rest vermehrt er um den dritten Theil;	$x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$
4) das zweyte Jahr braucht er wieder 100 Pf.	$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
5) den Rest vermehrt er abermal um den dritten Theil;	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
6) im dritten Jahr braucht er abermal 100 Pf.	$\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$
7) den Rest vermehrt er noch einmal durch den dritten Theil,	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$
8) und ist noch einmal so reich als er im Anfang war.	$\frac{64x-14800}{27} = 2x.$

In diesem letzten Satz ist das Exempel gesetzt; man darf also nur calculiren, und x suchen:

Satz: $\frac{64-14800}{27} = 2x$

$\cdot 27$

$64x - 14800 = 54x$

$54x = 54x$ subtr.

$10x - 14800 = 0$

$14800 = 1400$ addirt

$10x = 14800$

$: 10$

$x = 1480$

§. 390. Anm. Dieses vorausgesetzt lassen sich folgende Aufgaben leicht auflösen; wir wollen sie in einige Classen eintheilen, damit man sogleich sehe, in welche Gattung der Buchstabenrechnung sie gehören.

I. Exempel von einfachen Gleichungen.

Cajus wollte einen Garten um baar Geld kaufen, hat aber sein Vermögen in Capitalien stehen, zu dem Ende will er jedem seiner Schuldner einen Theil von ihrem Capital aufkünden, weil es gute Schulden sind, und er sein übriges Vermögen gern unter vielen Schuldnern vertheilt behalten will; wenn er nun jedem 50 fl. aufkündet, so hat er 100 fl. zu viel, und wenn er jedem 40 fl. aufkündet, so hat er 200 fl. zu wenig; man fragt, wie viel er Schuldner habe, was sein Garten koste, und wie viel er jedem aufkünden müsse, daß er weder zu viel noch zu wenig zu diesem Kaufschilling einnehme?

Die Anzahl der Schuldner sey x, so ist der erste Satz

$50x - 100 = 40x + 200$ der Wehrt des Garten.

$100 = \quad 100$ add.

$50x = 40x + 300$

$40x = 40x$ subtr.

$10x = 300$

$:10$

$x = 30$ die Anzahl der Schuldner;

$50 \cdot 30 - 100 = 1400$ fl. der Wehrt des Gartens;

$30 : 1400 = 1 : x40$ Rest 0 (x2: Rest 33 | 0) $46\frac{2}{3}$ fl. zahlt ein jeder Schuldner.

Auf eben diese Weise werden folgende Exempel berechnet.

Tirius hat zween silberne Becher mit einem gemeinschaftlichen Deckel, den er für 18 fl. schätzet; wenn er den Deckel auf den ersten Becher setzt, so ist er noch so viel wehrt, als der andere; setzt er aber den Deckel auf den andern Becher, so sind beede gleichviel wehrt. Oder er hat zwo Tabattieren, legt er in die erste 18 fl., so ist sie noch so viel wehrt als die andere, legt er aber die 18 fl. in die andere, so sind beede gleichviel wehrt. Man frägt, wie viel beede Becher oder Tabattieren

tieren wehrt seyen? Der Wehrt der einen sey x der andern y, so ist

Nr. I. $x + 18 = 2y$ und Nr. II. $y + 18 = x$

$\frac{x + 18}{2} = y$: a

nach

Nr. II. $x - 18 = y$

$\frac{x + 18}{2} = x - 18$ .2

$x + 18 = 2x - 36$

$36 = 36$ add.

$x + 54 = 2x$

$x = x$ subtr.

$54 = x$.

weil $y = x - 18$

$y = 54 - 18 = 36$.

$18 = 18$ subtr.

$y = x - 18$

der Wehrt des ersten Bechers oder der ersten Tabattiere; folglich nach nr. II. so ist, wenn man subtr. der Wehrt des zweyten.

Eben so ist das alte Exempel zu rechnen: Der Maulesel sagt zum Esel, wenn du einen Centner Last von mir nimmst, so haben wir beede gleich schwer; wenn aber ich einen Centner von dir nehme, so trage ich noch so schwer. Wie viel trug ein jeder? Es sey die Last des Esels y und des Maulesels x, so ist $x - 1 = y + 1$, und $x + 1 = (y - 1)2 = 2y - 2$; folglich $x = 2y - 3$, und also $y + 2 = 2y - 3$, und $y + 5 = 2y$, dahero $y = 5$ die Last des Esels, folglich $x = 7$ die Last des Maulesels. Man begreift von selbst, daß man diese Exempel allgemein machen kann, wenn man statt der Zahlen, die gegeben sind, die Buchstaben a u. s. w. setzt.

II. Exempel von einfachen Gleichungen und Proportionen.

Zween Bothen machen einerley Weg; der eine geht später als der erstere, aber lauft stärker; er wird also den ersten einholen. Gesetzt nun, der erste mache des Tags vier Meilen; der zweyte gehe drey Tag Später, und mache hingegen des Tags sechs Meilen; wann wird er den ersten einholen? Die gesuchte Zeit heisse x Tage; also wird der erste Zeit brauchen $3 + x$ Tage; denn 3

Tage

Tage hat er voraus; und lauft noch so lang bis ihn der zweyte einholt, das ist, nach den schon geloffenen 3 Tagen noch x Tage. Der Raum oder Weg, den er bis dahin durchloffen, wird $(3+x)4$ Meilen machen; denn jeden Tag macht er 4 Meilen; folglich in den ersten 3 Tagen 3.4 Meilen, und in den noch rückständigen x Tagen x.4 Meilen; der zweyte Both lauft nur x Tage, jeden Tag aber 6 Meilen, das ist, in x Tagen, x.6 Meilen; der Weg, den beede Bothen lauffen, ist gleich; folglich $6.x = (3+x)4$ oder $6x = 12+4x$, folglich $2x = 12$ und $x = 6$. Er holt ihn also in 6 Tagen ein. Oder allgemein: man setze die drey Tage, welche der erste früher oder der andere später ausgegangen $= c$
die Tagreise des ersten, das ist 4 Meilen $= a$
die Tagreise des letztern, das ist 6 Meilen $= b$
ist, weilen beede einerley Weg machen, wie oben

$$\begin{array}{r} bx = ac + ax \\ ax = ax \\ \hline bx - ax = ac \text{ oder} \\ (b-a)x = ac \text{ folglich} \end{array}$$

$$x = \frac{ac}{b-a}$$

Oder zween Cörper, die mit verschiedener Geschwindigkeit bewegt werden, laufen einander nach; man gibt die Distanz des einen vom andern, und die Geschwindigkeit beeder Cörper; man solle die Zeit finden, wenn sie zusammen stosen. Die Distanz sey $= c$, die Geschwindigkeit des langsamen Cörpers $= a$, des schnellen $= b$, so ist, weil sich die Zeiten wie die Geschwindigkeiten hier verhalten,

$$\begin{array}{r} a : b = x : c + x \text{ folglich} \\ \hline ac + ax = bx \text{ und} \\ ac = bx - ax = (b-a)x \text{ wie oben; dahero} \end{array}$$

$\frac{ac}{b-c} = x$. die allgemeine Formel für alle Fälle dieser Art.

III. Exempel von Brüchen.

Man solle eine Zahl finden, deren Hälfte, dritter und vierter Theil um eins gröser als die gesuchte Zahl ist: die gesuchte Zahl sey x, so ist

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$ oder unter einerley Benennung gebracht

$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x = x + 1$ das ist addirt

$\frac{26}{24}x = x + 1$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\

Der Titia Alter sey = x
so wird der Mutter Alter seyn = x + 40.

das Product davon $x^2 + 40x = 969$. eine unreine
man addire nach §. 321. $400 = 400$ quadr. Gleichung

$x^2 + 40x + 400 = 1369$

Hieraus ist die Quadrat-
Wurzel $x + 20 = 37$.
$20 = 20$ subtrahirt

$x = 17$ der Titia Alter;
folglich 17 + 40 der Mutter Alter.

Ein ander Exempel von einer reinen Gleichung ist folgendes: Ein Feldherr stellt seine Trouppen in ein vollkommenes Quadrat, es bleiben ihm aber 284 Soldaten übrig; nun diese nicht müssig stehen zu lassen, vertheilet er in jede Reyhe einen Soldaten weiter, es fehlen ihm aber hierzu noch 25. Man fragt, wie viel er Soldaten gehabt habe? Die Seite des ersten Quadrats sey = x, so ist die Anzahl der Soldaten $x^2 + 284$. Des andern Quadrats Seite ist nach der Aufgabe $x + 1$, folglich sein Quadrat $x^2 + 2x + 1$, und die Anzahl der Soldaten in diesem Fall $x^2 + 2x + 1 - 25 = x^2 + 2x - 24$. Folglich, weil die Anzahl der Soldaten einerley ist,

$x^2 + 284 = x^2 + 2x - 24$. u. wenn man x^2 beederseits subtr.
$284 = 2x - 24$, addirt man nun beederseits 24, so ist

$308 = 2x$ und $x = 154$. folglich die Anzahl Soldaten $(154 \cdot 154) + 284$.

V. Exempel, welche durch Progreßionen und Logarithmen aufgelößt werden.

Wenn einer sein Geld auf Leibrenten gibt, so muß man diese Rechnung verstehen. Ich will ein kurzes Exempel geben:

Cajus hat sein Geld in Zinsen stehen; hat aber nicht genug an den Zinsen, und muß vom Capital jährlich zusetzen. Gesetzt nun, er brauche alle Jahre gleichviel, und wollte wissen, wie lang er noch leben darf, oder wie lang es noch anstehe, bis er nichts mehr einzunehmen habe, so kann man die Sache folgender masen berechnen.

Das Capital sey = a
Jährlicher Zins oder das landläufige Procent heisse $= \frac{n}{m}$

Das was er im ersten Jahr zusetzt = b.
Die Zeit, wie lang ers treiben kann, das ist die Anzahl der Jahre, die man sucht = x.

So wird er das erste Jahr

I. An Zinsen brauchen eine Summe $= \frac{na}{m}$
und an Capital zusetzen $= b$

das ist, das erste Jahr wird er verzehren die Summe $= \frac{na}{m} + b$
eine Summe, die in allen folgenden Jahren gleich groß ist.

II. Das nächste zweyte Jahr wird sein Capital, weil er b zusetzte, nur noch seyn $= a - b$
also wird er auch weniger Zinse einnehmen; nemlich geradet so viel weniger als b ausgeworfen hatte: $\frac{nb}{m}$
das ist, der Verlust an Zinsen ist $= \frac{nb}{m}$

und folglich die Einnahme in Zinsen $= \frac{na}{m} - \frac{nb}{m} = \frac{na - nb}{m}$

Er setzt aber das zweyte Jahr wiederum zu, damit er gerade so viel wieder einnehme, als er das vorige Jahr eingenommen; er muß also erstlich b und sodann noch so viel vom Capital zusetzen, als er weniger Zins eingenommen, das ist, als b das Jahr vorher getragen hatte, d. i. $\frac{nb}{m}$, folglich ist der ganze Zusatz vom Capital im zweyten Jahr zusammen addirt $b + \frac{nb}{m}$, oder unter einerley Benennung gebracht $\frac{mb + nb}{m} = \frac{(m+n)}{m} . b$

III. Was er das dritte, vierte und folgende Jahre zusetzen muß, findet er durch die Regel Detri nach einer continuirlichen Proportion; wie sich der Zusatz des ersten Jahrs zum Zusatz des zweyten Jahrs verhält, so verhält sich der Zusatz des zweyten Jahrs zum Zusatz des dritten, und so dieser zum Zusatz des vierten; das ist in Buchstaben:

$b : \frac{(m+n)}{m} . b = \frac{(m+n)}{m} . b : y$ oder wenn man die erste Verhältniß mit b dividirt

$\frac{\quad}{\quad} : b$

$1 : \frac{m+n}{m} = \frac{(m+n)}{m} b : y$ folgl. y oder Zus. des 3. Jahrs $= \frac{(m+n)^2 b}{m^2}$ und

und weil ferner, da die erste Verhältniß immer bleibt, durch Hülfe der Division,

1: $\frac{m+n}{m}$: $\frac{(m+n)^2}{m^2}$ b : z so ist der Zus. des 4ten Jahrs = $\frac{(m+n)^3 b}{m^3}$

und eben so der Zusatz des fünften Jahrs = $\frac{(m+n)^4 b}{m^4}$

also ist jedesmal der Exponent von m + n um eins weniger als die Anzahl der Jahre. Dahero der Zusatz vom letzten oder vom xten Jahr = $\frac{(m+n)^{x-1} b}{m^{x-1}}$

Man hat dahero folgende Progreßion:

Jahre: 1 2 3 4 5 x

jährl. Zus. $b, \frac{b(m+n)}{m}, \frac{b(m+n)^2}{m^2}, \frac{b(m+n)^3}{m3}, \frac{b(m+n)^4}{m4}, \frac{b(m+n)^{x-1}}{m^{x-1}}$

Die Summe aller dieser x Zusätze ist dem ganzen Capital gleich, weil es durch die jährliche Zusätze nothwendig zulezt aufgehen muß. Da nun die Summe der gefundenen geom. Progreßion nach §. 388. gefunden werden kann, so ist nach selbigem §. das

Capital $a = \left(\frac{b(m+n)^x - b}{m^x}\right) : \frac{m+n-1}{m}$

und wenn man den Divisor unter einerley Benennung bringt $\frac{m+n}{m} - 1 = \frac{m+n-m}{m}$

$\frac{m+n-m}{m} = \frac{n}{m}$.

$a = \left(\frac{b(m+n)^x - b}{mx}\right) : \frac{n}{m}$ d. i. nach §. 70. $= \left(\frac{b(m+n)^x - b}{mx}\right) \cdot \frac{m}{n}$

und wenn man wirklich multiplicirt $a = \frac{mb(m+n)x}{nm^x} - \frac{mb}{n}$

jezo darf man nur fort calculiren $\frac{mb}{n} = \frac{mb}{n}$ add.

$a + \frac{mb}{n} = \frac{mb(m+n)^x}{nm^x}$. n

$na + mb = \frac{mb(m+n)^x}{m^x}$: m

$\frac{na}{m} + b = \frac{b(m+n)^x}{m^x}$

Diese Gleichung logarithmisch ausgedruckt nach §. 308. gibt $l\left(\frac{na}{m}+b\right)=lb+xl(m+n)-xlm$

$lb=lb$ subtr.

$$l\left(\frac{na}{m}+b\right)-lb=xl(m+n)-xlm$$

$$=x(l(m+n)-lm)$$

$$\frac{l\left(\frac{na}{m}+b\right)-lb}{l(m+n)-lm}:l(m+n)-lm$$

$$\frac{l\left(\frac{na}{m}+b\right)-lb}{l(m+n)-lm}=x.$$

§. 391. Wenn man das Exempel in Zahlen auflößt, so setzt man für Buchstaben die gehörigen Zahlen; z. E. das Capital sey 5000 fl. so ist $a=5000$; der Zins sey 5 Procent; so ist $\frac{n}{m}=\frac{1}{20}$; denn 5 ist der zwanzigste Theil von hundert; folglich $\frac{na}{m}=\frac{5000}{20}$ $=250$; es sey der jährliche Zusatz 50 fl. so ist $b=50$, und $\frac{na}{m}+b=250+50=300$. und weil $\frac{n}{m}=\frac{1}{20}$ so ist $n=1$, $m=20$, und $n+m=21$. Also nach der Formel

$$x=\frac{l\left(\frac{na}{m}+b\right)-lb}{l(m+n)-lm}=\frac{l.300-l.50}{l.21-l.20}$$

schlägt man nun die Logarithmen dieser Zahlen in den Tabellen auf, so ist

$l.300=24771212$	$l.21=13222193$
$l.50=16989700$	$l.20=13010300$
$l.300-l.50=7781512$	$l.21-20=211893$

also $\frac{l.300-l.50}{l.21-l.20}=\frac{7781512}{211893}=36\frac{15336}{21189}$ Jahr $=36$ Jahr 264 Tag.

§. 392. Man begreift von selbst, daß man durch diese Formel auch das Capital finden kann, wenn die Anzahl der Jahre gegeben ist, wie man auch den jährlichen Zusatz aus den gegebenen Jahren und Capital finden kann. Das hier berechnete Exempel, die Jahre zu finden, haben wir deswegen ausführlich vorgetragen, damit man auch ein Exempel von Logarithmen habe. Unerachtet man es übrigens auch auf eine andere Art berechnen könnte.

§. 393.

§. 393. Ich will noch ein Exempel vom Interusurio geben, wie solches Herr von Leibnitz berechnet, und Herr Geh. R. Bilfinger gegen die Herrn Juristen vertheidiget hat. Wenn ich einem hundert Gulden nach einem Jahr erst zu bezahlen schuldig bin, ich will ihn aber jezt gleich bezahlen, so fragt man, wie viel ich ihm geben müsse, das Capital zu fünf Procent gerechnet? Gebe ich ihm jezo 100 fl. so gehören mir innerhalb einem Jahr 5 fl. zurück; (weil ich nach Jahresfrist von diesen 100 fl. 5 Procent erheben könnte, und alsdann erst die 100 fl. zahlen dürfte.) Er gibt mir aber jezo gleich die 5 Procent zurück, folglich werde ich ihm in Jahresfrist den Zins von 5 fl. nemlich 15 kr. schuldig; diese will ich ihm auch jezt gleich zurück geben; er wird mir also in Zeit eines Jahrs den Zins von 15 kr. wieder schuldig seyn; so geht es fort, daß immer einer dem andern aufs neue etwas schuldig wird. Wenn nun das Capital a, und der landläufige Zins zu fünf pro Cento $\frac{1}{20}$, so gibt es folgende Reyhe

$$a - \frac{a}{20} + \frac{a}{20^2} - \frac{a}{20^3} + \frac{a}{20^4} - \frac{a}{20^5} + \frac{a}{20^6} \text{ u.s.w.}$$

Die Summe dieser Reyhe ist nach §. 296. $\frac{20^1}{20+1} = \frac{20}{21}a$.

Eben so geht es bey zwey Jahren:

Cajus ist mir eine gewisse Summe erst nach zwey Jahren zu bezahlen schuldig; was muß er mir geben, wenn er mich übers Jahr schon bezahlen will? Antw. $\frac{20}{21}a$. Nun sey $\frac{20}{21}a = b$, man fragt, Caius ist mir übers Jahr $\frac{20}{21}a = b$ schuldig, was muß er mir geben, wenn er mich jezo gleich bezahlt?

Antwort $\frac{20}{21}b$ Nun ist

$b = \frac{20}{21}a$ also substituirt

$$\frac{20}{21} \cdot \frac{20}{21}a = \frac{20}{21}^2 a;$$

Eine ähnliche Rechnung macht man bey drey Jahren; bey welchen $\frac{20^2}{21^3}a$ herauskommt; folglich wird für n Jahre $\frac{20^n}{21^n}a$ herauskommen. Diese Rechnung haben verschiedene Rechtsgelehrten, und unter diesen selbst Herr Pohlax in Mathesi forensi, wie er es p. 53. 54. edit. 2. gesteht, unrichtig verstanden, und daher Leibnitzen eines Irrthums auch pravitatis usurariæ beschuldigt. Auf die Belehrung Herrn geh. R. Bilfingers aber

gestund er die gemachte Fehler, wollte aber doch nicht nachgeben, theils wegen den Gesetzen l. 28. C. de Vsur. l. 26. pr. ff. de condict. in debiti, und wegen den damit übereinstimmenden Placitis aller JCtorum, theils weil er glaubte, Herr geh. Rath Bilfingers Fall sey moralisch unmöglich; indeme der Creditor, um keinen Schaden zu haben, den Augenblick so bald die Zinse einlaufen, sie wieder anderswo auf Zinse anlegen müßte. Allein Herr geh. Rath Bilfinger ließ es bey dem ersten Aufsatz ohne Antwort bewenden. Denn wenn man einem solche Einwürfe macht, so werden die Verständigen unter dem gelehrten Publico auf keine Antwort mehr warten, sondern selbst antworten können. Der letzte Einwurf war besonders von einem so gelehrten Mann, als Herr Prof. Pohlax war, fast nicht zu vermuthen. Es ist ja ein Unterschied zwischen 8 bis 14 Tagen, und zwischen ganzen Jahren. Wenn der Zins in 14 Tagen wieder angelegt wird, so verliehre ich zwar etwas, aber nicht so viel, als wenn ich ihn gar nicht anlege. Das augenblickliche ist nur von Leibnitzen angenommen, um die Rechnung zu erleichtern und faßlich zu machen; hätte man einen Zwischenraum zwischen dem Eingehen und Anlegen der Zinse angenommen, so würde man eine eben so richtige Rechnung herausbringen können, sie würde nur etwas schwerer seyn; dahero die Herrn Gegner sich noch mehr darinnen, aus Unwissenheit, verfehlen könnten, als in der Leibnizischen ersten und natürlichen Rechnung, die sie nicht einmal verstunden, bis sie Herr geh. Rath Bilfinger erklärt hat. Was aber den Jurid. Einwurf aus l. 28. C. de Vsuris. u. s. w. betrifft, so muß man es sichs gefallen lassen, wenn die Gesetze etwas wider die Regeln aller ökonomischen Billigkeit und Klugheit befehlen. Inzwischen wird man doch kein Gesetz aufweisen, daß einem nicht frey stehe, entweder auf baar Geld oder auf Zieler zu handeln! So lang nun diese juridische Gesetze währen, so wird allemal ein Oeconom, der nur ein wenig rechnen kann, und nicht wider seinen Nutzen handeln will, besonders bey grosen Summen, auf baar Geld und nie auf Zieler handeln. Da nun dieses frey steht, so werden, wo diese ökonomische Klugheit angewandt wird, die obigen Gesetze nach und nach von selbst unbrauchbar werden, wenn keine

Fälle mehr vorkommen, worinnen ein anderer erst über
zehen oder zwanzig Jahren was zu
bezahlen schuldig seyn
dörfte.

Die

Die

geometrische

Wissenschaften,

oder

die Elementargeometrie, die Trigonometrie, die practische Geometrie, und die höhere Geometrie.

Erstes Hauptstück,
von der gemeinen oder Elementargeometrie.

Erklärung.

§. 394.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft der Grösen, in soferne man auf die Lage, Ordnung und Verbindung ihrer Theile siehet; und in diesem Stück ist sie von der Arithmetik unterschieden. Ihre Gegenstände sind also gerade und krumme Linien, und die verschiedene Verhältnisse der Linien, Figuren, Flächen, Cörper. Wenn man nun die gerade Linien, und unter den krummen nur die Cirkellinie, nebst den darauf sich beziehenden Figuren, Flächen und Cörpern betrachtet, so handelt man die sogenannte Elementargeometrie ab, welche von den Elementen des Euclides diesen Namen hat; diese erste Gründe der Geometrie werden wir jezo im ersten Hauptstück der geometrischen Wissenschaften vortragen, vorher aber das nöthigste von ihrer Geschichte noch sagen.

Geschichte der Geometrie.

§. 395. Die erste Anfänge der Geometrie muß man bey den Egyptern suchen, welche durch die

die jährliche fruchtbare Ueberschwemmung des Nils genöthigt wurden, ihre Felder von neuem wieder abzumessen und einzutheilen; doch müssen diese erste Anfänge blos practisch gewesen seyn, weil in den folgenden Zeiten, z. E. nur ein Pythagoras, der doch bey den Egyptern die Geometrie gelernt, erst nach seinem empfangenen Unterricht neue Sätze erfunden, deren vorherige Unwissenheit oder Mangel unter den Egyptern noch von einer sehr geringen Theorie einen zulänglichen Beweis gibt. Denn wenn zu Pythagorä Zeiten die Egypter den pythagorischen Lehrsatz noch nicht wußten, so müssen sie sehr mittelmäßige Geometer gewesen seyn, oder die Nachkommen müssen die Wissenschaften ihrer Vorfahrer vergessen haben, wenn man etwa denken möchte, zu Salomons, und noch früher, zu Mosis Zeiten, seyen auch die mathematische Wissenschaften unter den Egyptern im höchsten Flor gewesen.

§. 396. Was nun die älteste Geschichte der theoretischen Geometrie betrifft, so soll in Rücksicht auf die Zeitordnung, Euphorbus aus Phrygien der erste gewesen seyn, welcher die Linien und ihre Verhältniß betrachtet, und das ungleichseitige Dreyeck, wie Laertius berichtet, erfunden haben. Auf ihn folgte Thales von Miletus, 612 vor Christi Geburt, der erst im Alter eine Reise nach Egypten that, und sich von den dasigen Priestern unterrichten liesse, und die Höhe der Pyramiden aus dem Schatten, den sie warfen, messen lernte. Er hat die Gleichheit der Verticalwinkel und der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Triangels erfunden. Ueberdas meldet Proclus von ihm, er sey der erste gewesen, der bewiesen, daß der Cirkel durch einen jeden Diameter in zween gleiche Theile getheilet werden, und daß man in den Cirkel ein gleichseitiges Dreyeck einschreiben könne; für welche letztere Erfindung er dem Jupiter einen Ochsen geopfert habe. Woraus man siehet, daß er bey den Egyptern ausser dem Practischen wenig Theorie gelernet haben müsse; sonst würden ihm diese erste Erfindungen der Geometrie nicht eigenthümlich zugeschrieben worden seyn, sondern vielmehr würde man sagen müssen, er habe sie aus Egypten mitgebracht. Auf ihn folgte

Py-

Pythagoras, der zuerst den Namen der Mathematik aufbrachte; er reißte in seiner Jugend, da er kaum zwanzig Jahr alt war, nach Egypten, und da er im vierzigsten Jahr nach Italien zurück kam, so erwarb er sich in der Philosophie und Mathematik einen Namen. Seine eigene Erfindungen bestätigen das, was wir von den Egyptern §. 395. gesagt haben. Denn die von ihm sich herschreibende Erfindung, daß die Winkel eines jeden geradelinigten Dreyecks zween rechten oder 180° gleich seyen, wie auch der berühmte sogenannte Pythagorische Lehrsatz, daß im rechtwinklichten Dreyeck das Quadrat der größten Seite den beeden Quadraten der übrigen Seiten zusammen genommen gleich sey, sind so nothwendige Sätze, daß die Egypter ohne deren Kenntniß keine sonderliche theoretische Geometrä seyn konnten; Sonst müßte Pythagoras nur ein Plagium begangen, und sich die Ehre einer Erfindung zugeschrieben haben, die er den Egyptern zu danken hatte. Für die letztere berühmte Erfindung hat er den Göttern oder den Musen eine Hecatombe geopfert, wie die alte Verse lehren:

Pythagoras quondam Diis fecit nobile sacrum
Inventa est illi linea quod celebris.

Plutarch sagt, es sey nur ein Ochs gewesen; Cicero glaubt, der Ochs sey nicht natürlich, weil Pythagoras die Schlachtung der Thiere für eine Sünde gehalten, sondern ein von Meel, oder, wie Porphyrius meynt, ein von Leimen gemachter Ochs gewesen. Pythagoras starb im 80 Jahr seines Alters, 540 Jahr vor Christi Geburt. Nicht lange hernach kamen die philosophische Schulen zu Athen auf; Socrates war ihr Stifter, und unerachtet er, wie es ein jeder vernünftiger Mensch billigen wird, mehrmalen sagte, man solle sich nicht zuviel und allein auf diese Wissenschaft legen, weil man sonst von vielen nützlichen Geschäften des gesellschaftlichen Lebens abgezogen würde, so war er doch der Geometrie nicht unkundig. Plato, sein Schüler, war schon mehr dafür eingenommen, und nahm keinen Zuhörer in seine Academie auf, der die Geometrie nicht wußte; erklärte auch alle Tage, neben andern philosophischen Lehrsätzen, ein geometrisches Problem. Er starb 346 Jahr vor Christi Geburt. Die philosophischen Anstalten zu Athen machten unter dem Plato und seinen Nachfolgern diesem Musensitz auch in den mathematischen Wissenschaften Ehre genug. Das Delphische Problem von Verdopplung des Cubi ist bekannt. Hippocrates von Chius, ein durch die Seeräuber verunglückter Kaufmann, kam nach Athen, sich über den an ihm begangenen Raub zu beklagen, er wurde mit den Philosophen bekannt, verließ das vorige Gewerb, und legte

sich mit solchem Erfolg auf die Geometrie, daß er der erste von denen war, welche das Delphische Problem auf die Erfindung zwoer mittlern Proportionallinien zwischen zwo gegebenen Linien reducirte: von dieser Zeit an wurde nun das Problem nach der letztern Weise immer aufgegeben. Eben dieser Hippocrates hat sich auch auf die Quadratur des Cirkels gelegt, und man hat von ihm die sogenannte Lunulam Hippocratis, die er vollkommen geometrisch quadrirte. Sie nutzt aber zur Quadratur des ganzen Cirkels, wie wir an seinem Ort hören werden, weiter nichts; wie dann überhaupt dieses Geschäfte in unsern Tagen etwas unnützes ist, dafür sich niemand eine grose Belohnung versprechen dürfte; wovon an seinem Ort mit mehrerem gehandelt werden solle.

§. 397. In diesem Zustande befanden sich nun die geometrische Wissenschaften bis auf den **Euclides**, der 300 Jahr vor Christi Geburt als der erste Lehrer der Mathematik zu Alexandrien auch das erste und allerbeste geometrische Handbuch geschrieben hat. Er ist von dem Euclides aus Megara, mit welchem ihn einige für eine Person halten, wohl zu unterscheiden. Denn Diogenes Laertius hat des Megarensischen Euclides Leben genau beschrieben, und alle seine Schriften sorgfältig aufgezeichnet; unter diesen Schriften aber stehen die vortrefliche Elemente der Geometrie nicht. Sie müssen also nicht von dem Megarischen, sondern von einem andern Euclides herkommen. Ueber das war der Megarische Euclid, nach dem Diog. Laert. ein finsterer, murrischer, zanksüchtiger Philosoph; der alexandrinische Geometra aber der angenehmste, freundlichste und liebenswürdigste Mann von der Welt, wie ihn Pappus nennt; ein Character, der den nachfolgenden Geometern in neuern Zeiten nicht immer beygelegt wird. Wiewohl der Herr von **Leibnitz** eben so wenig finsteres, und hingegen eben so viel leutseliges an sich hatte, als der alexandrinische Euclid. Dieser Geometra schrieb nun ein mathe-

matisches Handbuch oder 15 Elemente in griechischer Sprach, welche in das Lateinische übersetzt, von verschiedenen Commentatoribus erklärt, und von dem Dechales so hoch gehalten wurden, daß er sie nach der heiligen Schrift für das allerbeste Buch in der Welt angepriesen. Die erste gedruckte Auflage kam 1482 zu Venedig heraus.

§. 398. Joh. Scheubel, Prof. der Math. zu Tübingen, hat 1550 die sechs erste Elemente des Euclidis in sofern verändert herausgegeben, daß er in den Demonstrationen alles ohne einige Buchstaben, deren sich Euclides bedient, mit den eigenen Namen der Sachen vorträgt; andere, wie Christian Härlin und Conr. Dasypodius zu Straßburg, haben seine Beweise in förmliche Sylogismos resolvirt. Noch andere wie Petr. Ramus, der zu seiner Zeit vor etlich hundert Jahren für den größten Philosophen zu Paris gehalten wurde, und Laz. Schoner haben die Ordnung im Euclide verbessern wollen. Ramus schrieb daher 27 Elemente, die er und sein Anhang den Euclideischen vorzog; zu Frankfurt am Mayn kamen sie 1599 unter folgendem Titel heraus: *Petri Rami* Arithmetices libri duo, Geometriæ septem & viginti, a *Laz. Schonero* recogniti & aucti. Allein weder die Lehrart noch die Ordnung des Euclides liesse sich durch diese Bemühungen verdrengen, indeme die größte Kenner immer den ungeänderten Euclides allen andern Arbeiten vorgezogen. Nach diesem folgte Archimedes von Syracus, der sich 250 Jahr vor Christi Geburt einen bleibenden Namen machte, und wie in der Mathematik überhaupt, also auch besonders in der Geometrie seinen erfindsamen Geist zeigte. In der sphärischen Geom. hat man von ihm den schönen Lehrsatz, daß die Kugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder sey, der einerley Höhe und Grundfläche mit ihr habe. Den Beweis davon solle er auf sein Grabmal, als ein ewiges Monument, zu stechen befohlen haben. Er wurde bey der Einnahme von Syracus durch einen Soldaten über seinen Cirkeln im 75 Jahr seines Alters erstochen. Die übrige von den Alten, z. E. einen Apollonius, Pappus u. s. w. welche vorzüglich die conische Sectionen betrachteten, wollen wir in der Geschichte der höhern Geometrie nennen. Von den Elementen des Euclides merken wir noch an, daß seit Erfindung der Buchdruckerkunst die erste und ungemein seltene Ausgabe 1482 in der Druckerey Erhard Ratdolts in Augspurg herauskam, die Herr Prof. Kästner in einem Schreiben 1750. an Herr Card. Quirini recensirt, und davon ich auch in meinen Amoenit. nov. lit. als einem in der Herzogl. Regierungsraths-Bibliothek zu Stutgart befindlichen Werk Nachricht gegeben habe.

§. 399.

§. 399. Die Geometrie wurde nun auf diesem Fuß erhalten, bis vor etlich hundert Jahren mit den übrigen Wissenschaften auch die Geometrie wieder Zusätze bekam. Den Franc. Vieta haben wir schon genannt §. 126. Er ist aber auch in der Geschichte der gegenwärtigen Wissenschaft zu nennen. Apollonius gab ein Problem auf, das er περι επαφων nannte, das ist, einen Cirkel zu beschreiben, den drey andere gegebene berühren. Adr. Romanus, ein Niederländer, der aber von Löwen nach Würzburg sich begab, und daselbst wohnhaft wurde, glaubte, man müsse es durch Hülfe der Hyperbeln auflösen. Vieta hingegen zeigte, daß es aus den Elementen und blos geometrisch resolvirt werden könne. Romanus hielt diese Auflösung so hoch, daß er sogleich von Würzburg aus nach Frankreich reißte, den Vietam sprach, und da er ihm vorher ganz unbekannt war, eine sehr genaue Freundschaft mit ihm deßwegen stiftete. Bey seiner Heimreise zahlte ihm Vieta die Reisekosten, und that ihme viele Ehre an; wie Thuanus L. 129. Hist. schreibet.

§. 400. In dem gegenwärtigen Jahrhundert hat der Freyherr von Wolf die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke aus dem philosophischen Begriff der Aehnlichkeit zu erklären gesucht, und daher in seinen mathematischen Schriften den alten Euclideischen Vortrag und Beweis weggelassen; ob er dadurch mehr Deutlichkeit in die Geometrie gebracht, stehet nach dem Urtheil verschiedener Kenner noch dahin; wenigstens sollte der Euclideische Vortrag auch noch beybehalten worden seyn. In unserer Abhandlung wird man ihn nicht vermissen; wir werden aber den Wolfischen Beweis auch anführen, und hernach den Leser aus beeder Vergleichungen selbst urtheilen lassen. Das weitere, das hier etwa noch gesagt werden könnte, wird in der Ausführung vorkommen.

Allgemeine Sätze von Linien, Winkeln und Figuren.

§. 401. Erkl. Geometrische Cörper stellt man sich als etwas zusammenhangendes dergestalten vor,

vor, daß, wo ein Theil aufhöret, sogleich der andere unmittelbar anfängt. Dieses unmittelbare Zusammenhängen heißt **eine stetige Gröse**, (Continuum), und die **geometrische Ausdehnung**, in die Länge, Breite und Tiefe, nach ebenen oder krummen Richtungen, ist überhaupt ein Raum, den das Continuum oder die stetige Gröse nach allen Seiten zu ausfüllt. Die Grenzen des Cörpers heißt man **Flächen**, die Grenzen der Flächen **Linien**, die Grenzen der Linien **Punkte**.

§. 402. **Zusatz.** Weil die Grenze eines Cörpers kein Cörper mehr ist, so hat die Fläche keine cörperliche Ausdehnuug, das ist, der Cörper bestehet nicht aus Flächen; eben so bestehet die Fläche nicht aus Linien, weil die Linien ihre Grenzen sind; und aus gleichem Grund erhellet, daß die Linie nicht aus Punkten bestehe, oder daß die Punkte keine Theile der Linien seyen.

§. 403. **Zusatz.** Dem ungeachtet gibt es überall Punkten in den Linien, weil kein auch noch so kleiner Theil der Linie gedacht werden kann, der nicht einen Anfangs- und Endpunkt hätte; und weil die Theile der Linie, sie mögen groß oder klein seyn, wieder Linien sind, so besteht die Linie aus unendlich viel unendlich kleinen Linien, das ist, der Verstand stellt sie als unendlich theilbar vor, wie auch die Flächen und Cörper.

§. 404. **Erklär.** Eine **gerade Linie** (linea recta) ist, deren Theile allesamt einerley Richtung (Direction) haben, oder nach einer und eben derselben Gegend, oder nach einem Punkt zu liegen; *Fig.* 5.

eine krumme aber, deren kein Theil mit dem andern einerley Richtung hat. *Fig.* 6.

§. 405. **Zusatz.** Durch zween Punkte überhaupt wird also die Lage, (Positio,) und durch die zween Endpunkte die Länge, (Magnitudo) einer geraden Linie gegeben; und zwischen zween Punkten läßt sich nur eine gerade Linie ziehen.

§. 406. Anm. Man kann daher die gerade Linie auch als den kürzesten Weg zwischen zween Punkten, und die krumme als einen jeden andern Weg ansehen, doch so, daß niemalen ein Theil des Wegs gerade gehe. Oder wie der Freyherr von Wolf definirt: Eine gerade Linie ist, deren jeder Theil dem Ganzen ähnlich ist; da die Theile der krummen Linie dem Ganzen unähnlich sind.

§. 407. Anmerk. Die krumme Linie ist also von der Neigung zweyer geraden Linien in einem Punkt doppelt unterschieden: denn erstlich läßt sich in den krummen Linien kein gerader Theil angeben, und zweytens kann man nicht bestimmen, wie weit die Richtung des Punkts jeden Augenblick von der vorigen verschieden sey, oder bey dem Cirkel, wo sie zwar einerley ist, wie groß die Neigung sey.

§. 408. **Willk. Satz.** Man mißt eine gerade Linie, durch Ruthen, Schuhe, Zolle; eine Ruthe hält im geometrischen Maas 10 Schuh, ein Schuh 10 Zoll, ein Zoll 10 Linien; Ruthen schreibt man durch eine 0, Schuh durch ′, Zoll durch ″, Linien durch ‴, z. E. 12° 3′ 5″ 6‴. Was man sonst für Maase hat, wird in der practischen Geometrie gezeigt werden.

§. 409. **Erkl. Ebene Flächen** (Superficies plana) sind, von deren jedem Punkt zum andern man gerade Linien ziehen kann; so daß alle Punkten dieser Linien in der Fläche liegen; bey **krummen Flächen** läßt sich kein ebener Theil angeben.

§. 410. **Erkl.** Ein Cirkel *Fig.* 7. entsteht, wenn sich eine gerade Linie AC um einen vesten

Punkt

Punkt C herum bewegt. Die krumme Linie, die durch diese Bewegung entsteht, heißt die **Peripherie** ADEBGF. Der Punkt C, um welchen sich AC bewegt, ist der **Mittelpunkt** (Centrum); eine jede gerade Linie von dem Mittelpunkt C bis an die Peripherie hin, heißt der **Radius**; eine Linie von einem Punkt der Peripherie zum andern die **Sehne** (Chorda) FG, und wenn sie durch den Mittelpunkt geht, der **Diameter** oder **Durchmesser** AB, die größte Chorde; die gerade Linie, die den Cirkel berührt, ohne ihn zu schneiden, wie AF die **Tangente**, ein Theil der Peripherie wie AD, DE, ein **Bogen**, (Arcus circuli) ein Theil der Circularfläche wie DCE zwischen dem Bogen und den Radiis ein **Ausschnitt** des Cirkels (Sector Circuli) und ein anderer zwischen der Sehne und dem Bogen wie FHG ein **Abschnitt** oder Segmentum.

§. 411. **Willk. Satz.** Man theilet die Peripherie in 360 Theile, die man **Grade** heißt, weil diese Zahl sich ohne Bruch durch viel andere dividiren läßt; der 60ste Theil eines Grads heißt eine Minute, der sechzigste Theil einer Minute eine Secunde u. s. w. man schreibt sie wie im Längenmaas, die Ruthen, Schuhe, Zolle; die Grade = o, die Minuten = ′, die Secunden = ″, u. s. w. z. E. 36° 17′ 38″ 5‴ sind 36 Grad, 17 Minuten, 38 Secunden, 5 Terzen; welche nach der Sexagesimalrechnung berechnet werden.

§. 412. **Zusatz.** Weil die Linie AC, die sich um C herum bewegt, sich immer gleich bleibt, so sind alle Radii eines und eben desselben Cirkels einander gleich.

§. 413. **Zusatz.** Weil AC = CB, so ist AB = 2AC; oder der Diameter ist der doppelte Radius, und der Radius der halbe Diameter.

§. 414. **Erklär.** Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zwoer geraden Linien in einem Punkt. z. E. AB; und BC in dem Punkt B. *Fig.* 8. Wenn die Neigung so beschaffen ist, daß sich die eine Linie auf keine Seite mehr als auf die andere wendet, wie in *Fig.* 7. DC auf AC, so ist der Winkel ein rechter (rectus) ACD. Und eine Linie, die auf der andern unter dieser Bedingung steht, heißt eine **Perpendicular-Linie**, oder **lothrecht** stehende Linie. Ein **spitziger** Winkel (acutus) ABC ist kleiner als ein rechter, *Fig.* 8. und ein **stumpfer** Winkel (obtusus) DEF *Fig.* 9. ist gröser als ein rechter.

§. 415. **Willk. Satz.** Man schreibt einen Winkel entweder durch die an die Endpunkte gesetzte Buchstaben ABC, DEF, so, daß der Buchstabe, der die Neigung anzeigt, in die Mitte kommt, oder durch einen in die Neigung gesetzten kleinen Buchstaben, wie *Fig.* 8. 9. die Buchstaben n, o; da es heißt, der Winkel n, der Winkel o.

§. 416. **Zusatz.** Weil *Fig.* 7. auf dem Diameter AB die Linie DC so stehen kann, daß sie sich weder gegen AC noch CB mehr neiget, und eben dieses durch die Verlängerung in die entgegengesetzte Seite bewerkstelligt wird, so besteht ein jeder Cirkel aus vier rechten Winkeln; und weil der vierte Theil von 360°, welche die Peripherie des Cirkels ausmachen, = 90° ist, so hält ein jeder rechter Winkel 90°.

§. 417. **Zusatz.** Das Maas eines Winkels ist also ein Cirkelbogen, dessen Mittelpunkt die Neigung des Winkels ist, und der zwischen den Schenkeln des Winkels, als zween Radiis, enthalten ist.

§. 418. **Zusatz.** Weil alle Cirkel, grose wie kleine, einerley Zahl von Graden, nemlich 360° halten, so ist es gleichgültig, ob man mit einer grosen oder kleinen Eröffnung des Cirkels einen Winkel mißt; die Anzahl der Grade ist beederseits einerley, nur sind die einzelen Grade im ersten Fall gröser, und im andern kleiner. Denn man begehrt nicht zu wissen, wie groß der Bogen sey, wenn er in eine gerade Linie ausgedehnt würde, sondern wie viel er Grade halte, oder wie groß die Neigung des Winkels sey.

§. 419. **Erklär.** Eine **Figur** ist eine allenthalben begrenzte stetige Gröse; sie ist **geradelinigt** und eben (rectilinea), wenn ihre Grenzen gerade Linien sind, oder wenn sie allenthalben von geraden Linien eingeschlossen wird. z. E. **Dreyecke**, die in drey Seiten, **Vierecke**, die in vier, **Vielecke**, die in mehrere Seiten eingeschlossen sind.

§. 420. **Zusatz.** Zwo gerade Linien schliessen also keine Figur ein, sondern man muß wenigstens drey Linien dazu haben, dahero das Dreyeck die erste und simpelste geradelinigte Figur ist.

§. 421. **Erklär.** **Dreyecke** kann man nach ihren Winkeln und nach ihren Seiten betrachten. In Rücksicht auf die Seiten gibt es **gleichseitige**, (æquilatera), wenn alle drey Seiten gleich sind, **gleichschenklichte** (æquicrura, isoscelia), wenn zwo Seiten gleich sind, und **ungleichseitige** Drey-

ecke, (scalena) wenn keine Seite der andern gleich ist. In Rücksicht auf die Winkel gibt es **rechtwinklichte** (rectangula), wenn einer von den Winkeln ein rechter ist, **stumpfwinklichte** (obtusangula, amblygona), wenn das Dreyeck einen stumpfen Winkel enthält, und **spitzwinklichte** (acutangula, oxygona), wenn alle drey Winkel spitzig sind. Das sind die sechs Gattungen von Dreyecken. Ein **Viereck** hat vier Seiten und vier Winkel; es heißt ein **Quadrat**, wenn alle vier Seiten und Winkel gleich, folglich rechte Winkel sind; ein **Rechteck** oder Rectangulum, wenn zwar alle vier Winkel gleich, das ist, lauter rechte Winkel, hingegen nur zwo gegenüber stehende Seiten, also nicht alle vier Seiten gleich sind. Eine **Raute** (Rhombus), wenn alle vier Seiten gleich, die Winkel aber schief, und nur zwey gegenüber stehende gleich sind; eine **länglichte Raute** (Rhomboides), wenn nur zwo gegenüber stehende Seiten und zween eben so stehende Winkel einander gleich sind. Der allgemeine Name für diese Gattungen von Vierecken ist das **Parallelogramm**; alle andere Vierecke, die nicht so beschaffen sind, heißt man Trapezia, oder ungleichseitige Vierecke. Ein **Vieleck** ist entweder regulair, oder irregulair; jenes hat lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel, dieses nicht.

§. 422. **Lehrsatz.** Durch zween Winkel, die zusammen kleiner als 180°, und durch eine Seite, welche die beede Winkel einschliesset, wird nur ein einiges Dreyeck bestimmt. Denn man verlängere (*Fig.* 15.) die Seite IG, welche mit der gegebenen GH einen Winkel IGH macht, so wird sie der gleichfalls ver-

verlängerten Seite HL, welche mit HG den Winkel LHG macht, in dem Punkt K begegnen, und das Dreyeck in diesem einigen Punkt bestimmen.

§. 423. **Zusatz.** Wenn daher in zweyen Dreyecken zween Winkel mit der eingeschlossenen Seite einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das ist congruent, und decken einander; und wenn man hundert von solcher Beschaffenheit hätte, so würden sie alle einander decken.

§. 424. Anm. Warum die beede Winkel zusammen weniger als 180° oder zween rechte Winkel betragen müssen, wird weiter unten an seinem Ort erwiesen werden. Das was zum gegenwärtigen Lehrsatz gehört, ist völlig erwiesen, nemlich daß durch zwey Winkel, und die eingeschlossene Seite ein Dreyeck bestimmt, und daß folglich alle auf diese Weise bestimmte Dreyecke gleich und ähnlich seyen.

§. 425. **Lehrsatz.** Durch zwo Seiten und den eingeschlossenen Winkel wird nur ein einiges Dreyeck bestimmt. Denn nach *Fig.* 14. sind die Seiten DE und EF gegeben, nebst dem Winkel DEF, den sie einschliessen; man kann also von D nach F keine andere Linie ziehen, als die Linie DF, weil zwischen zween Punkten nur eine einige gerade Linie möglich ist.

§. 426. **Zusatz.** Wenn also in zweyen Dreyecken zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das ist congruent, und decken einander.

§. 427. **Zusatz.** Zwo Seiten mit einem Winkel überhaupt, der nicht von ihnen eingeschlossen ist, bestimmen das Dreyeck noch nicht; es wäre denn, daß man sagte, was es für ein Dreyeck sey, nemlich

lich rechtwinklicht, spitzwinklicht oder stumpfwinklicht; welche Voraussetzungen aber nicht in die erste und allgemeine Bestimmungsgründe der ganzen Geometrie gehören. Denn *Fig.* 10. seyen gegeben die zwo Seiten DC und AC, und der Winkel C, der nicht von ihnen eingeschlossen ist, so werden sich durch diese drey gegebene Stücke die Dreyecke: AEC und ADC bestimmen lassen; denn man setze den Fuß des Cirkels in A, und beschreibe mit der Eröffnung AE den Bogen ED, so ist AE = AD. Folglich werden zwey verschiedene Dreyecke dadurch bestimmt, die einander nicht decken. Sagt man aber, das Dreyeck soll rechtwinklicht seyn, und der rechte Winkel ist bey AB, so wird es das △ BAC; soll es stumpfwinklicht seyn, und die gegebene Winkel und Seiten sind C, AC, AE, so ist es das △ AEC; soll es spitzwinklicht seyn, so ist es das △ ACD.

§. 428. Anm. Man kann aus diesem Lehrsatz auch zeigen, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten △ gleich seyen; wenn man das △ verdoppelt, und beeden hernach eine gemeinschaftliche Seite läßt; wir werden aber den Beweis unten besonders vortragen.

§. 429. **Lehrsatz.** Aus drey Seiten, davon je zwo zusammen gröser als die dritte seyn müssen, läßt sich nur ein einiges Dreyeck bestimmen. Denn man nehme *Fig.* 13. CD zur Grundlinie an, und lege BC mit dem Punkt C auf D, AB mit dem Punkt B auf D; so wird ein Dreyeck bestimmt, das dem andern vollkommen gleich und ähnlich ist, wenn man AB mit dem Punkt A auf C, und BC mit dem Punkt B auf D leget; weil in diesem Fall nur die Lage verändert wird; denn wenn man sie aus Papier ausschneidet, und ihre Lage ändert; so wird man finden,

den, daß sie einander vollkommen decken. Eben das folgt, wenn man AB oder BC zur Grundlinie macht; man bekommt allemal congruente Dreyecke, in welchen blos die Lage etwas verändert ist.

§. 430. **Zusatz.** Wenn in zweyen Dreyecken die drey Seiten einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, oder congruent.

§. 431. **Zusatz.** Wenn zwo Seiten zusammen nicht gröser sind als die dritte, so treffen sie über der Grundlinie nicht zusammen, sondern fallen entweder in die Grundlinie hinein, und machen also wieder eine gerade Linie und keine Figur, oder sie lassen eine Oeffnung, und geben folglich kein überall begrenztes Continuum.

§. 432. **Zusatz.** Ein gleichseitiges Dreyeck wird durch eine einige Linie oder Seite, und ein gleichschenklichtes durch die Grundlinie und einen Schenkel bestimmt.

§. 433. **Zusatz.** Nach allen diesen Lehrsätzen sind die Winkel, die gleichen Seiten, und die Seiten, die gleichen Winkeln entgegen stehen, oder opponirt sind, einander gleich, eine Seite aber ist demjenigen Winkel opponirt, der sie schließt; so ist *Fig.* 14. DF dem Winkel E opponirt.

§. 434. **Anmerk.** Die angeführte drey Lehrsätze mit ihrem jedesmaligen ersten Zusatz sind allgemeine Bestimmungsgründe durch die ganze Geometrie, und müssen daher wohl gefaßt werden. Man könnte den dritten auch aus dem zweyten herleiten, mit Zuziehung der Anmerkung §. 428. allein da man auch in diesem Fall eben das Aufeinanderlegen der Seiten und Winkel voraus setzt, wie bey unserm Beweis, so ist der gegebene eben so deutlich. Man muß bey allen diesen Beweisen nur an den Grundsatz denken, daß Figuren, die einander decken, wie z. E. bey zwo gleichen Händen die rechte die linke, und die linke die rechte Hand deckt, vollkommen gleich und ähnlich sind, und

hernach bey dem Beweis im Sinn, oder auch wirklich in der Ausübung mit ausgeschnittenem Kartenpapier die Figuren aufeinander legen, und sehen, ob sie unter den gegebenen Bedingungen einander decken.

§. 435. **Lehrsatz.** Ein jeder Winkel und eine jede gerade Linie läßt sich in zween gleiche Theile theilen.

I. Satz. *Fig.* 20.

o = n

Beweis.

CE = CF } per constr.
EG = FG }
CG = CG

△CEG = △CFG §. 430.
folgl. o = n. §. 433.

II. Satz. *Fig.* 19.

AC = CB.

nr. I. Beweis.

AD = DB } per con-
AE = EB } struct.
DE = DE

△ADE = DEB. §. 430.
folgl. n = o. §. 433.

nr. II. n = o }
AD = DB } nach nr. I.
DC = DC

△ADC = △CDB §. 426.
folgl. AC = CB. §. 433.

§. 436. **Erläuterung.** Man soll *Fig.* 20. den Winkel ECF in 2 gleiche Theile theilen, so macht man aus dem Scheitel C mit beliebiger Oeffnung des Cirkels Durchschnitte in E und in F, daß CE und CF gleich werden; und eben solche Durchschnitte macht man in G, aus den Punkten E und F, daß EG = GF werde; hernach ziehet man die Linie CG; so ist o = n, oder der Winkel C in zween gleiche Theile getheilt, deren Hälfte ist o und n. Bey der Theilung der geraden Linie AB, macht man aus A und B Durchschnitte in D und E mit beliebiger Eröffnung

des

des Cirkels, daß AD = DB, und AE = EB werden; man zieht die Linie DE durch die Punkten D und E, die sich selbst gleich ist, so werden AC und CB die zwo Hälften der Linie, und in C wird die Linie AB in zween gleiche Theile getheilt seyn.

§. 437. **Zusatz.** Es erhellet aus §. 435. I. Satz, daß man den halben Winkel wieder halbiren könne u. s. w. folglich läßt sich jeder Winkel in 2, 4, 8, 16, 32 gleiche Theile geometrisch eintheilen. Hingegen die Eintheilung in drey gleiche Theile (Trisectio anguli) gehört schon in die höhere Geometrie.

§. 438. **Zusatz.** Aus dem Beweis §. 435. II. Satz erhellet, wie man aus einem gegebenen Punkt auf eine gerade Linie einen Perpendikel herabfällen könne; denn der Punkt sey D, die Linie AB *Fig.* 19. so wird DC auf AB perpendicular seyn, weil der Winkel ACD = DCB folglich = 90° wie unten erwiesen werden soll.

§. 439. **Lehrsatz.** In einem gleichschenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie (anguli ad basin) einander gleich; denn *Fig.* 21. theile man die Grundlinie AE in zween gleiche Theile in D nach §. 435, und ziehe aus dem Punkt D nach der Spitze C die Linie DC, so wird sichs zeigen, daß die Winkel an der Grundlinie o und n gleich sind.

Satz. o = n.

Beweis.

AC = CE per hypoth. weil es ein gleichschenk. △ ist
AD = DE per construct.
DC = DC

△ACD = △DCE. folglich
o = n §. 433.

§. 440. **Zusatz.** In einem gleichseitigen Dreyeck sind alle drey Winkel einander gleich; denn man kann es in allen Lagen als ein gleichschenklichtes ansehen, und die dritte gleiche Seite zur Grundlinie machen.

§. 441. **Zusatz.** Aus dem gegebenen Beweis erhellet, wie man auf eine Linie aus einem gegebenen Punkt D eine Perpendicularlinie aufrichten solle, wenn man *Fig.* 21. AD = DE und AC = EC mit dem Cirkel macht, und sodann die Linie DC ziehet, so ist sie auf DA perpendicular.

Die Verhältniß der Winkel gegen einander, nebst den daraus fliessenden Folgen.

§. 442. **Erklär.** **Nebenwinkel** sind diejenige Winkel, die aus einem und eben demselben Punkt einer gegebenen geraden Linie gezogen werden. *Fig.* 16. ACD, DCB, oder n, m sind Nebenwinkel; denn sie sind beede aus dem Punkt C auf die Linie AB gezogen; lat. heissen sie contigui, und wenn es ihrer nur zween sind, deinceps positi. **Vertical-Winkel** sind, deren Schenkel im Scheitel beederseits verlängert einander durchkreuzen, wie *Fig.* 18. die Winkel o und x.

§. 443. **Lehrsatz.** Alle Nebenwinkel auf einer Linie sind zusammen zween rechten, oder 180° gleich.

Satz. *Fig.* 16.

$n + m = 180°$

Bew.

$n = AD$

$m = DB$

$n + m = AD + DB$

$AD + DB = 180°$; $= \text{semic.}$

$n + m = 180°$

Satz. *Fig.* 17.

$m + n + o = 180°$

Bew.

$m = DE$

$n = EF$

$o = FG$

$m + n + o = DE + EF + FG$

aber $DE + EF + FG = 180°$

$m + n + o = 180°$

§. 444. **Zusatz.** Alle aus einem gegebenen Punkt auf einer geraden Linie gezogene Winkel, welche zusammen 180° halten, sind Nebenwinkel.

§. 445. **Zusatz.** Ist einer von zween Winkeln gegeben, so weiß man auch den andern; denn es sey *Fig.* 16. m gegeben, so ist $n = 180° - m$.

§. 446. **Zusatz.** Wenn auf einer geraden Linie nur zween Nebenwinkel sind, und wenn beede einander gleich sind, so ist einer wie der ander ein rechter; denn es sey *Fig.* 19. $x = y$. so ist

I. $x + y = 180°$

$x = y$

$2x = 180$

$:2$

$x = 90 = \text{recto.}$

II. $x + y = 180$

$x = y$

$2y = 180$

$:2$

$y = 90 = \text{recto.}$

§. 447. **Zusatz.** Wenn von zween Nebenwinkeln einer ein rechter ist, so ist auch der andere ein rechter; ist aber der eine stumpf, so ist der andere spitzig; und ist der eine spitzig, so ist der andere stumpf.

§. 448.

§. 448. **Zusatz.** Alle Winkel um einen festen Punkt herum halten zusammen 360°, oder 4 rechte Winkel, oder einen ganzen Cirkel. *Fig.* 17. denn $m + n + o + p + c + q = DE + EF + FG + GH + HI + ID = Circ. = 360° = 4 . 90° = 4.$ rectis.

§. 449. **Lehrsatz.** Alle Vertical-Winkel sind einander gleich. Denn man ziehe aus dem Durchschnittspunkt bey m *Fig.* 18. mit beliebiger Eröffnung des Cirkels den Theil der Peripherie ABDE, und bemerke neben den zween Vertical-Winkeln noch den Nebenwinkel m, so wird der Beweis von selbst sich geben.

Satz. *Fig.* 18.

$o = x.$

Bew.

$o + m = 180°$
$m + x = 180°$

$o + m = m + x$
$m = m$ subtr.

$o = x.$

§. 450. **Zusatz.** Wenn also von zween Vertical-Winkeln einer gegeben ist, so ist der andere auch gegeben; wenn $o = 30°$, so ist auch $x = 30°$.

§. 451. **Lehrsatz.** In einem jeden geradelinigten Dreyeck sind zween Winkel zusammen kleiner als 180°, oder zween rechte Winkel. Man betrachte das △ ABC *Fig.* 22. und theile die Seite AC in zween gleiche Theile in E, nach §. 435. Man ziehe die Linie BE, und verlängere sie nach F, bis

EF

EF = BE. Man ziehe die Punkte F und C zusammen, so bekommt man das △ EFC = △ ABE; weil nach der Construction AE = EC, EB = EF, und die Vertical-Winkel bey E einander gleich sind; folglich das △ EFC = △ ABE. Man bezeichne die kleine Winkel s, o, n, m, so ist der Beweis des Lehrsatzes leicht zu finden.

Satz. *Fig.* 22.

$s + o < 180^{\circ}$

Bew.

△ ABE = △ EFC per constr. folgl. nach §. 433.

s = n

$n < n + m$

$s < n + m$ §. 23.

o = o

add.

$s + o < n + m + o$

$n + m + o = 180^{\circ}$ §. 443.

$s + o < 180^{\circ}$

§. 452. **Zusatz.** Dieser Beweis gilt von allen drey Seiten; denn wenn man die Seite AC nach G verlängert, so wird sich der Beweis eben so geben, wie er sich bey der nach D verlängerten Seite BC ergab; also sind allemal zween Winkel in einem Dreyeck zusammen kleiner als 180°, oder zween rechte.

§. 453. **Zusatz.** Zween an die Endpunkte einer Linie gesetzte Winkel können niemalen zusammen stosen, es sey dann, daß sie kleiner als zween rechte sind; in welchem Fall sie allein convergiren;

sind

sind sie aber grösser, so divergiren sie auf der einen, und stosen auf der entgegengesetzten untern Gegend der Seiten zusammen, wenn man sie unterwärts verlängert.

§. 454. **Zusatz.** Man begreift hieraus zugleich, daß in einem geradelinigten Dreyeck nicht mehr als ein rechter, und nicht mehr als ein stumpfer Winkel seyn könne, wir werden aber davon unten noch besonders reden.

§. 455. **Erklär. Parallellinien** sind, welche, wenn man sie auf beeden Seiten ohne Ende verlängert, niemalen zusammen stosen. Dergleichen sind *Fig.* 23. AB, CD.

§. 456. **Lehrsatz.** Wenn *Fig.* 23. zwo Linien AB, CD durch eine dritte EF so durchschnitten werden, daß

I. die beede innere Winkel n + y zusammen 180°,

II. die Wechselswinkel x und y einander gleich,

III. der äussere Winkel o dem entgegengesetzten innern y gleich ist, so sind die Linien parallel.

I. Satz. *Fig.* 23.

wenn n + y = 180°, so ist AB, CD parallel.

Beweis.

Wenn n + y = 180° so kann AB, CD gegen B und D nie zusammen stosen; folglich sind sie parallel. Denn wenn AB, CD convergiren, so ist n + y < 180°; aber n + y ist nicht kleiner als 180°; folglich convergiren sie nicht, und sind also parallel. Eben so beweißt man auch, daß sie nicht divergiren können.

Ist

II. Satz.

Wenn $x = y$, so ist AB, CD parallel.

Bew.

$x + n = 180°$ nach §. 443.
$x = y$ per hypoth.

$y + n = 180°$
eben so $x + m = 180°$ folgl.

AB, CD parallel.

III. Satz.

Wenn $o = y$, so ist AB, CD parallel.

Bew.

$o + n = 180°$
$o = y$ per hyp.

$y + n = 180°$ und
$y + m = 180°$ also

AB, CD parallel.

§. 457. Lehrsatz. Wenn zwo Linien AB, CD parallel, *Fig.* 23. so machen

I. die beede innern Winkel $n + y = 180°$.

II. die Wechselswinkel x und y sind einander gleich;

III. der äussere Winkel o ist dem entgegengesetzten innern gleich.

Diese drey Sätze sind die obige umgekehrt, und fliessen nach den Regeln der Conversion daraus; der vorhergehende Lehrsatz ist unmittelbar und directe aus den ersten Gründen der Geometrie in aller mathematischen Schärfe; der zweyte ist Propositio prior conversa, und läßt sich noch auf verschiedene andere Methoden erweisen, wie wir in der Anmerkung zeigen.

§. 458. Anm. Der gegebene Beweis ist der Euclideische, mit einer kleinen Veränderung, um die Sache deutlicher zu machen. Herr v. Wolf hat den Euclideischen verlassen, und folgenden *Fig.* 25. gegeben. Man fälle auf die Linie DE aus dem Punkt des Durchschnitts H den Perpendikel HE, und auf die Linie CH aus dem Punkt D den Perpendikel DC; so sind die Dreyecke DCH und DEH einander gleich, weil $DH = DH$. $DC = HE$, und die Winkel C und E rechte Winkel sind. §. 427. folgl. $x = y$. Allein dieser Beweis setzt voraus, daß $DC = HE$; die Sache ist wahr, aber die Erklärung des Euclides von Parallellinien sagt

nur, daß sie nie zusammen stosen; nicht aber, daß alle Perpendicularlinien zwischen zwo parallelen gleich seyen, welches erst eine Folge aus dem Beweis ist. Gibt man von Parallelen die Erklärung, daß sie solche Linien seyen, die auf einer gegebenen CD perpendicular stehen, so hat der Beweis seine Richtigkeit. Euclides aber wollte diese Definition nicht geben, sondern lieber aus der seinigen erst folgern. Man sehe, was Herr Prof. Kästner theils in der Vorrede zum 1. Th. seiner mathem. Anfangsgründe aus Gelegenheit der Einwendung Hrn. Corte, theils in der Ausführung S. 181. folgg. davon weiter meldet. Ich habe in dieser neuen Ausgabe auch selbst meinen vorherigen Beweis in etwas verändert; bey der Wolfischen Definition fließt der Beweis auch ganz richtig aus mathematischen Gründen in aller Schärfe. Herr Ge. Simon Klügel, der nunmehro Prof. in Marpurg ist, hat auf Anrathen Herrn Hofrath Kästners die gelehrte Geschichte dieses Satzes abgefaßt, und in einer Disp. 1764. wo er 28erley Versuche anführt, ihn zu beweisen, deutlich auseinander gesetzt. Sonst kann man den Satz auch mechanisch beweisen, wenn die Linie CD sich immer parallel nach AB bewegt.

§. 459. Zus. Die Linie CD *Fig.* 25. schneide eine von zwey Parallelen unter dem rechten Winkel C, so wird auch der andere CDE ein rechter Winkel seyn; denn $C + CDE = 180°$ nach §. 456; $C = 90$, nach der Voraussetzung, dieses subtrahirt, läßt $CDE = 90$; eben das gilt von dem Perpendikel HE.

§. 460. Zus. Wenn $CH = DE$, $CD = HE$, so ist, weil auch vorhin $DH = DH$, $\triangle CHD = \triangle DHC$, folglich $x = y$ und $s = r$, daher CH mit DE, und CD mit HE parallel, das ist, wenn in einem Viereck je zwo einander gegenüber stehende Seiten gleich sind, so sind sie auch parallel.

§. 461. Zus. Und umgekehrt, wenn je zwo gegen einander über stehende Seiten parallel sind, so sind sie einander auch gleich, das ist, Parallelen zwischen Parallelen sind gleich. Denn es sey CH parallel DE, CD parallel HE, so ist $x = y$ und $r = s$ nach §. 457. folglich $\triangle CDH = \triangle DHE$ nach §. 422. und also $CD = CH = DE$.

§. 462

§. 462. Zus. Wenn in einem Parallelogramm ein rechter Winkel ist, so sind alle vier rechte Winkel; es sey (*Fig.* 30.) o = 90, so ist n = 90, m = 90, r = 90°; denn

I. o + n = 180° nach §. 456.
o = 90 per hypoth. subtrahirt
n = 90.

II. n + m = 180°
n = 90 nr. I. subtr.
m = 90

III. m + r = 180
m = 90 nr. II.
r = 90

§. 463. Zus. Sind drey oder mehrere Parallelen gezogen, wie *Fig.* 24. so wird die sie schneidende Linie bey den Durchschnitts-Punkten gleiche Wechsels-Winkel, und den äussern den entgegengesetzten innern auch gleich machen, wie aus dem Beweis §. 456. von selbst erhellet, wie dann auch je zween und zween innere jedesmal zusammen 180° halten werden.

§. 464. Lehrsatz. Alle Winkel in einem geradelinigten Dreyeck, machen zusammen 180° oder zween rechte Winkel aus. Denn man ziehe mit der Grundlinie DE des Dreyecks, DEC *Fig.* 26. die Parallellinie AB durch den Scheitel C, und bezeichne die Winkel n, o, m, r, s, so wird sich der Beweis von selbst geben.

Satz. *Fig.* 26.

r + o + s = 180°.

Beweis.

n = r nach §. 456.
o = o
m = s nach §. 456. man addire beede Reyhen zusammen, so ist

n + o + m = r + o + s aber
n + o + m = 180° nach §. 443. folgl.
r + o + s = 180°.

§. 465. Zus. In einem geradelinigten Dreyeck kann also nicht mehr als Ein rechter, und vielweniger mehr als Ein stumpfer Winkel seyn, die übrige zween müssen spitzig seyn; weil sonst ihre Summe mehr als 180° betragen würde.

§. 466. Zus. In einem gleichseitigen Dreyeck, wo alle drey Winkel einander gleich sind, hält ein jeder Winkel 60°, weil $60 = \frac{180}{3}$.

§. 467. Zus. In einem rechtwinklichten gleichschenklichten Dreyeck ist der Winkel an der Grundlinie = 45°. Denn der rechte Winkel hält 90°, folglich die andern beede auch 90°; und weil sie einander gleich, jeder 45°.

§. 468. Zus. Wenn in einem ungleichseitigen Dreyeck zween Winkel gegeben sind, so ist auch der dritte gegeben; er ist nemlich 180°, weniger die zween gegebene; denn weil alle drey 180° halten, so darf man nur die zween gegebene von 180° abziehen, so bleibt der dritte übrig.

§. 469. Zus. In einem gleichschenklichten Dreyeck sind alle drey Winkel gegeben, wenn nur einer gegeben ist. Denn entweder ist einer von den gleichen Winkeln an der Grundlinie gegeben oder nicht: ist jenes, so darf man ihn nur verdoppeln, und von 180° abziehen, so hat man den dritten; ist aber dieser gegeben, so darf man ihn von 180° abziehen, und den Rest halbiren, so hat man das Maas der zwey übrigen.

§. 470. Lehrs. Der äussere Winkel an einem Dreyeck ist den beeden entgegengesetzten innern gleich. (Angulus externus æquatur duobus oppositis internis) Denn man verlängere *Fig.* 27. 28. die Seiten CA nach B, und bezeichne die Winkel o, n, x, y, so ist der Beweis von selbst zu machen; der äussere Winkel ist nemlich o, die beede entgegengesetzte innere x und y.

Satz. *Fig.* 27. 28.

$o = x + y.$

Beweis.

$o + n = 180°$ nach §. 443.

$n + x + y = 180°$ nach §. 464.

$o + n = n + x + y$

$n = n$ subtr.

$o = x + y.$

§. 471. Zus. Wenn der äussere Winkel gegeben, so sind die zween entgegengesetzte innere zusammen und auch der dritte, als der Nebenwinkel vom äussern Winkel gegeben.

§. 472. Zus. In einem gleichschenklichten Dreyeck ist der äussere Winkel zweymal so groß als einer von den entgegengesetzten innern, wenn die innere die Winkel an der Grundlinie sind; und der Winkel an der Grundlinie ist die Hälfte von dem äussern Winkel.

§. 473. Lehrsatz. Der Winkel zwischen zwo Parallellinien ist die Summe der Winkel, den seine Schenkel mit den Parallellinien machen. *Fig.* 29. Der Winkel sey FEG, man verlängere FE bis H,

H, und bezeichne die Winkel n, x, y, r; so ist die Folge richtig.

Satz. *Fig.* 29.

$n = x + y$.

Beweis.

$n = y + r$ nach §. 470.

$r = x$ nach §. 457. man substituire

so ist $n = y + x$.

§. 474. Anm. Diesen Lehrsatz braucht man in der Astronomie, wenn man die Parallaxe der Sterne genauer berechnen will; er verdient dahero wohl, in der Geometrie vorgetragen zu werden, worinnen er bisher wenigstens in den gewohnten Lehrbüchern noch nicht erschienen ist.

§. 475. Erkl. Der **Winkel an dem Mittelpunkt** (angulus ad Centrum) ist derjenige, dessen Spitze an den Mittelpunkt, und dessen beede Schenkel an die Peripherie des Cirkels stosen, wie *Fig.* 31. der Winkel ACB, oder o; hingegen der **Winkel an der Peripherie** (angulus ad peripheriam), dessen Spitze sowohl als die beede Schenkel an die Peripherie hinstosen, *Fig.* 31. der Winkel ADB oder x.

§. 476. Zus. Der Winkel an dem Mittelpunkt hat zu seinem Maas den Bogen, auf dem er steht. Denn weil AC = CB, so ist AB das Maas des Winkels o nach §. 417.

§. 477. Lehrs. Der Winkel an dem Mittelpunkt ist zweymal so groß als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einerley Bogen steht. Wo es nach *Fig.* 31. 32. 33. drey Fälle gibt, in welchen die Lage dieser Winkel gegen einander betrachtet werden kann.

I. Fall.

I. Fall. Satz. *Fig.* 31.

o = 2x.

Bew.

o = x + y nach §. 470.
x = y §. 439.

o = 2x und
$\frac{1}{2}$o = x.

II. Fall. Satz. *Fig.* 32.

o + m = 2x + 2n.

Bew.

o = 2x
m = 2n } nach nr. I.

o + m = 2x + 2n oder
$\frac{o+m}{2}$ = x + n.

III. Fall. Satz. *Fig.* 33.

o = 2x.

Bew.

p + o = 2r + 2x nach nr. II.
p = 2r subtr.

o = 2x. oder
$\frac{1}{2}$o = x.

§. 478. Zusatz. Der Winkel an der Peripherie hat zu seinem Maas den halben Bogen, auf dem er steht. Denn (*Fig.* 31.) x = $\frac{1}{2}$o; $\frac{1}{2}$o = $\frac{1}{2}$AB, folgl. x. = $\frac{1}{2}$AB.

§. 479. Zusatz. Alle Winkel an der Peripherie, die auf einem und eben demselben Bogen stehen, sind einander gleich; denn nach *Fig.* 34. ist

D = $\frac{1}{2}$AB
E = $\frac{1}{1}$AB } nach §. 478.
F = $\frac{1}{2}$AB
G = $\frac{1}{2}$AB folglich

D = E = F = G.

§. 480. Zus. Alle Winkel an der Peripherie, die auf dem Diameter, das ist, auf einem halben Cirkel stehen, sind rechte Winkel, und ein jeder hält 90°;

90°; denn *Fig.* 35. ist nach dem vorhergehenden §. der Winkel ADB = AEB = AEF = $\frac{1}{2}$AB, aber $\frac{1}{2}$AB = 90° oder ein rechter Winkel; folglich ADB = AEB = AEF = 90°. Diese Eigenschaft des Cirkels muß man sich wohl bekannt machen, indeme man sich im folgenden mehrmalen darauf berufen wird.

§. 481. Zus. Der über die Peripherie verlängerte Winkel x nach *Fig.* 30. hat zu seinem Maas die halbe Differenz der zween Cirkelbogen AB und DF, die seine verlängerte Schenkel EA und DB schneiden.

Denn o = x + y nach §. 470.
y = y subtr.

o — y = x; da nun o = $\frac{1}{2}$AB, y = $\frac{1}{2}$DF } und nach §. 478.

so ist, wenn man diese Wehrte substituirt o — y = $\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$DF

folglich $x = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DF = \frac{AB - DF}{2}$.

§. 482. Zusatz. Man kann an dem Ende einer Linie nach §. 480. leicht einen Perpendikel aufrichten, auch einen jeden Winkelhacken oder rechten Winkel nach eben demselbigen Zusatz probieren oder prüfen, ob er richtig seye.

Die Verwandlung der Figuren.

§. 483. Erkl. Eine **Diagonallinie** ist eine Linie, die von einem Eck der gegebenen Figur zu einem andern gezogen wird, wie *Fig.* 37. die Linie BD.

§. 484.

§. 484. **Zus.** Das Viereck ist also die erste Figur, in welcher eine Diagonallinie möglich.

§. 485. **Lehrsatz.** Eine Diagonallinie theilet ein jedes Parallelogramm in zween gleiche Theile.

Satz. *Fig.* 37.

$\triangle ABD = \triangle BCD$.

Beweis.

$AB = CD$, $AD = BC$ } nach §. 421. weil es ein Parallelogramm ist, nach der Voraussetzung.

$BD = BD$

folglich $\triangle ABD = \triangle BCD$. nach §. 429.

§. 486. **Zus.** Demnach werden alle Quadrate, Rectangula oblonga, Rhombi und Rhomboides durch die Diagonalen in zwey gleiche Dreyecke getheilt; die Trapezia sind unter den Vierecken allein ausgenommen, weil sie nach der Erklärung davon keine Parallelogramme sind.

§. 487. **Lehrsatz.** Ein jedes Rectangulum kann in ein Quadrat und ein jedes Quadrat in ein Rectangulum verwandelt werden. Denn *Fig.* 38. verlängere man von dem gegebenen □ FIDE die Seite DE, bis DC der Höhe des Rectanguli gleich ist, in welches man es verwandeln will; man ziehe von C durch I die Linie CG, welche die verlängerte FE in G schneiden wird; man mache das Dreyeck AGC dem Dreyeck EGC gleich; so wird ABIH = IDEF.

Satz. □ IDEF = □ ABIH. *Fig.* 38.

Beweis.

$\triangle EGC = \triangle AGC$.

$\triangle GIF = \triangle GHI$ nach §. 483. dieses subtr.

läßt

läßt △EGC — △GIF = △AGC — GHI das ist in der Figur

FICE = ACIH weil ferner
△BIC = △DCI §. 483. dieses subtr.

FICD — △BIC = ACIH — △DCI das ist in der Figur

□FIDE = □ABIH.

§. 488. **Zusatz.** Eben so erhellet, daß Rhombus sich in ein Rhomboides, Rectangula und Rhomboides in andere gleichen Inhalts verwandeln lassen.

§. 489. **Zusatz.** Wenn also in einem Parallelogrammen die Diagonallinie gezogen, und in selbiger nach Belieben ein Punkt, wie I *Fig.* 38. angenommen wird, durch welchen man mit den Seiten des Parallelogramms die Parallellinien HD, und BF ziehet, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen die zwey, durch welche die Diagonallinie nicht gehet, einander gleich sind.

§. 490. **Erklär.** Wie man die Grundlinie eines Dreyecks die Seite nennt, mit deren es auf dem Horizont stehend vorgestellt wird, so ist seine Höhe eine Linie, die von der Spitze auf den Horizont aber perpendicular herabgezogen wird, dahero wann es schief ist, die Grundlinie verlängert werden muß. Wie *Fig.* 41. EH, *Fig.* 45. BE, die Höhen sind; übrigens ist es gleichgültig, welche Seite man zur Grundlinie annimmt.

§. 491. **Lehrsatz.** Ein jedes schiefwinklichtes Parallelogramm läßt sich in ein ihm gleiches rechtwinklichtes von einerley Grundlinie und Hö-

he

he verwandeln, oder zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich. Denn *Fig.* 39. stehen die zwey Parallelogramme ABCD und ABFE, jenes rechtwinklicht, dieses schief, beyde auf einer Grundlinie, und sind von einerley Höhe, das ist, zwischen zwo Parallelen DF und AB, eingeschlossen; man ziehe die Linie CE; so wird sich der Beweis von selbst geben.

Satz. *Fig.* 39.

□ ABCD = □ ABFE.

Beweis.

AB = DC aus der Definition der Parallelogr. nach §. 421.
AB = EF folgl.

nr. I. DC = EF
CE = CE addirt

DC + CE = EF + CE d. i. in der Figur
DE = CF.

DE = CF nr. I.
DA = CB } nach §. 421.
AE = BF }

nr. II. △DAE = △CBF. folglich nach §. 429.

△DAE = △CBF nach nr. II.
△CGE = △CGE subtr.

△DAE − △CGE = △CBF − △CGE d. i. in der Figur

DAGC = EGBF. ferner
△ AGB = △ AGB addirt, gibt

DAGC + △AGB = EGBF + △AGB. d. i. in der Figur

□ ABCD = □ ABFE.

§. 492.

§. 492. **Zusatz.** Auf eine ähnliche Weise erhellet, daß nach der *Fig.* 40. ABDF = ACEF; und die Höhe beeder Parallelogrammen ist CK.

§. 493. **Zusatz.** Alle Dreyecke, die einerley Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich; welches aus §. 491. verglichen mit §. 485. deutlich ist. Denn *Fig.* 41. ist △ACB = △ADB; weil □ AFCB = □ADEB nach §. 491. es ist aber ACB = ½AFCB, und △ADB = ½ADEB. Da nun die Ganze gleich sind, so sind auch die Hälften gleich, das ist, das △ABC = △ADB. Eben so werden alle Dreyecke, so viel deren sind, wenn sie einerley Grundlinie und Höhe haben, einander gleich seyn.

§. 494. **Lehrsatz.** Ein jedes Dreyeck läßt sich in ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und Seite verwandeln. Denn es seye *Fig.* 42. das △BAC gegeben, man solle es in das Parallelogramm MCHL, dessen Winkel CHL gegeben ist, verwandeln. Man theile die Grundlinie BC in E in zween gleiche Theile, und richte unter dem gegebenen Winkel ECG = CHL das Parallelogramm ECGF auf, man verlängere FG nach I, daß GI der gegebenen Seite gleich werde; Man mache den Winkel GIH dem gegebenen CHL gleich, und ziehe durch die Punkte I und C die Linie IK, welche in K die bis dahin verlängerte Linie FE schneiden wird; man ziehe endlich durch K eine Parallellinie mit FI, so ist □MCHL = △BAC.

Satz. *Fig.* 42.

△BAC = □MCHL.

Bew.

Beweis.

$\triangle ABC = \square ECGF$. nach §. 493. weil $ABC = \frac{1}{2}ABCG$ und $\frac{1}{2}ABCG = ECFG$, welches letztere aus der Construction klar ist.

$\square ECGF = MCHL$ nach §. 491.

$\triangle ABC = \square MCHL$.

§. 495. **Zusatz.** Weil ein jedes schiefes Parallelogramm sich in ein rechtwinklichtes und dieses in ein Quadrat verwandeln läßt, nach §. 487. so läßt sich ein jedes Dreyeck in ein schiefes Parallelogramm, aus diesem in ein Rectangulum, und aus diesem in ein Quadrat verwandeln; man mag hernach diese oder jene Verwandlung bey vorwaltenden Umständen nöthig haben.

§. 496. **Zus.** Ist der gegebene Winkel CHL, ein rechter, so wird das Dreyeck unmittelbar in ein Rectangulum, und aus demselben in ein Quadrat verwandelt; wenn man wie oben, FEC den gegebenen rechten Winkel gleich macht.

§. 497. **Lehrsatz.** Wenn man die Diagonallinie eines Parallelogramms in zween gleiche Theile theilet, *Fig.* 43. und ziehet durch den Theilungs-Punkt C die Linie DF nach Belieben von einer Parallelseite zur andern, so sind die Trapezia ADFG und DBEF einander gleich.

Satz. *Fig.* 43.

$ADFG = DBEF$.

Beweis.

$\triangle ABG = \triangle EGB$.

nr. I. $\triangle DCB = \triangle FCG$ nach §. 423. weil $GC = CB$

ex

ex constr. die Winkel CGF
=CBD und die Winkel bey
C vertical. folglich

$\triangle ABG - \triangle DCB = \triangle EGB - FCG.$ das ist
in der Figur

$ADCG = EBCF$ weil nun wie oben, nr. I.
$\triangle FCG = \triangle DCB$ so ist, wenn man beederf. add.

$ADCG + \triangle FCG = EBCF + \triangle DCB$ das ist
in der Figur

$ADFG = DBEF.$

§. 498. **Zusatz.** Ein jedes Parallelogramm läßt sich durch den Mittelpunkt seiner Diagonallinie in so viel gleiche Trapezia theilen, als sich durch diesen Punkt Linien geben lassen, das ist, in unendlich viele.

§. 499. **Lehrsatz.** Alle vier Winkel in einem Trapezio machen, wie in einem jeden Viereck, zusammen 360° oder einen ganzen Cirkel oder vier rechte Winkel, welches klar ist, wenn man *Fig.* 45. die Diagonallinie ziehet.

Satz. *Fig.* 45.

$A + B + C + D = 360°$

Bew.

Die Summe der Winkel in $\triangle ABD = 180°$ } nach
Die Summe der Winkel in $\triangle BCD = 180°$ } §. 464.
folgl. add.

Die Summe der Winkel in $\triangle ABD + \triangle BCD = 360°$
Diese Sum. ist = der Sum. der Wink. $A+B+C+D$;

folgl. die Summe der Winkel im Trapezio,
das ist $A+B+C+D = 360°$.

§. 500.

§. 500. **Zusatz.** Wenn das Trapezium in einen Cirkel sich einschreiben läßt, so machen *Fig.* 46. zween einander gegenüber stehende Winkel wie A und C, ferner B und D jedesmal zusammen 180° oder zween rechte; das ist $A + C = 180°$ und $B + D = 180°$; denn $A = \frac{1}{2}BCD$ und $C = \frac{1}{2}BAD$, folglich $A + C = \frac{1}{2}(BCD + DAB,)$ das ist, wie aus der Figur erhellt, $\frac{1}{2}$. Circ. $= \frac{1}{2}$. $360° = 180°$.

§. 501. **Zusatz.** Eine jede geradelinigte Figur läßt sich durch die Diagonallinien in Dreyecke, und diese Dreyecke lassen sich in Quadrate verwandeln nach *Fig.* 63. verglichen mit §. 494.

§. 502. **Erklärung.** In einem rechtwinklichten Dreyeck heissen die beeden Seiten die den rechten Winkel einschliessen, die Catheti, und die Seite die dem rechten Winkel entgegen stehet, und ihn gleichsam aufspannet, die Hypothenusa.

§. 503. **Lehrsatz.** Zwey gegebene Quadrate lassen sich in eines verwandeln, das den gegebenen zween vollkommen gleich ist, und eines läßt sich in zwey verwandeln, die dem gegebenen gleich sind. Oder das Quadrat der Hypothenuse ist den beeden Quadraten der Cathetorum zusammen genommen gleich. Denn man setze die Seite AB und BC der zwey gegebenen Quadrate ABHG und BCKI, *Fig.* 51. unter dem rechten Winkel ABC zusammen, ziehe die Hypothenuse AC, und richte auf dieselbe das Quadrat ACDF auf; man ziehe mit CD aus dem Punkt B des rechten Winkels, die Parallellinie BE, und vereinige die Punkte B und F durch die Linie BF, die Punkten G und C durch

die

die Linie GC; so wird, wenn man noch die Winkel n, o, m bezeichnet, und die Diagonallinien BG und FL ziehet, der Beweis nicht schwer seyn.

Satz. *Fig.* 51.

AB quadr. + BC quadr. = AC quadr. oder weil das Quadrat AB = AB^2, u. s. w

$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Beweis.

n = m nach §. 421. sind rechte Wink. in Quadr.
o = o add.

n + o = m + o.
GA = AB } nach §. 421.
AC = AF } folglich

$\triangle AGC = \triangle ABF$ nach §. 426.
$\triangle AGC = \triangle AGB$ nach §. 493.

$\triangle ABF = \triangle AGB$
$\triangle AGB = \frac{1}{2}ABHG$ nach §. 486.

$\triangle ABF = \frac{1}{2}ABHG$
$\triangle ABF = \triangle ALF$ nach §. 493.

$\frac{1}{2}ABHG = \triangle ALF$
$ALF = \frac{1}{2}AFEL$ nach §. 486.

$\frac{1}{2}ABHG = \frac{1}{2}AFEL$. 2

ABHG = AFEL.

Eben so ist BCKI = DELC. folglich add.

ABHG + BCKI = AFEL + DELC das ist in der Figur

AB quadr. + BC quadr. = ACDF oder AC quadr.
oder $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

§. 504. Dieses ist der wichtige pythagorische Lehrsatz, der sonsten auch Magister Matheseos heißt; Pythagoras soll ihn erfunden, und dafür den Göttern eine Hecatomben geopfert haben; das ist, nach der gemeinsten Erklärung ein Opfer von hundert Ochsen. Homerus braucht aber dieses Wort von Opfern, die über hundert ja über tausend Opferstücke hielten, und eben keine Ochsen waren, sondern auch Schaafe, Ziegen u. s. w. es heißt also überhaupt, ein groses Opfer, welches eher die Zuhörer des Pythagoras als er selbst für diese Erfindung geopfert haben mögen; dahero man sich weiter den Kopf mit einigen nicht darüber verbrechen darf, wie es komme, daß Pythagoras, der ein Thier zu tödten für eine Sünde hielte, in so ein groses Schlachtopfer einwilligen konnte? Und noch vielweniger sind diejenigen zu hören, die Hecatombe gerade für ein Ochsenopfer, aber wegen den besondern Meynungen des Pythagoras für ein unblutiges Ochsenopfer ausgeben, und deswegen sagen, er oder seine Zuhörer haben künstliche Ochsen von Teig, oder von Leimen gemacht, und solche hernach geopfert. Doch es mag mit dem Opfer so oder anders gegangen seyn, so ist uns ungleich weniger daran gelegen, als an der Erfindung dieses wichtigen Lehrsatzes selbst, welcher durch die ganze Mathematik hindurch in alle dahin gehörige Wissenschaften einen ungemein grosen Einfluß hat. Unser berühmte Herr Prof. Kies hat im Jahr 1766. einen Beweis aus der Differentialrechnung gegeben, und dardurch, wie er selbst schreibt, das zweyte Duzend von Beweisen dieses Lehrsatzes, da man schon vorher 23 bekannt gemacht, vollends complirt.

§. 505. **Zusatz.** Wenn man von dem Quadrat der Hypothenuse das Quadrat eines der Catheторum abzieht, so bleibt das andere übrig; oder $AC^2 - AB^2 = BC^2$.

§. 506. **Zusatz.** Ein jedes Quadrat läßt sich verdoppeln, oder in ein Quadrat verwandeln, das noch einmal so groß ist. Denn man ziehe *Fig.* 52. die Diagonallinie AC, so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nach §. 503. das ist $2AB^2$ nach §. 421. oder 2. ABCD. Eben so läßt sich auch ein jedes Quadrat halbiren, daß die Hälfte ein Quadrat wird, das noch einmal so klein ist, als das vorige.

§. 507. **Zusatz.** Drey oder mehrere Quadrate, von verschiedener Grösse, lassen sich in eines ver-

verwandeln, das den gegebenen zusammen genommen gleich ist. Denn es seyen die Quadrate *Fig.* 53. AB^2, BC^2, CD^2, DE^2, wo alle gegebene Breiten unter rechten Winkeln zusammen gesetzt sind, so ist AE^2 allen diesen Quadraten zusammen genommen gleich; weil $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$; und $AE^2 = AD^2 + DE^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$.

§. 508. **Zusatz.** Eine jede geradelinigte Figur läßt sich in ein ihr gleiches Quadrat verwandeln, denn sie läßt sich durch Diagonallinien in Dreyecke verwandeln, diese können in Quadrate verwandelt werden §. 495. die Quadrate zusammen aber können alle in eines verwandelt werden, nach dem unmittelbar vorhergehenden Zusatz.

Die Ausmessung geradelinigter Figuren.

§. 509. **Erklär.** Eine geradelinigte Figur wird ausgemessen, wenn man eine kleinere Fläche in ihr so oft herum legt, als sie sich herumlegen läßt; die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die kleinere Fläche in der grösern herumgelegt werden kann, bestimmt den Inhalt der grösern Fläche; (Aream Figuræ). Man wählt zu Ausmessung solcher Figuren kleine Quadrate, weil sich alle geradelinigte Figuren in Quadrate verwandeln lassen. §. 495. Den Inhalt eines solchen Quadrats bestimmt man durch Linien, Zoll, Schuhe, Ruthen, nach dem geometrischen Maas, davon was §. 408. gesagt worden.

§. 510. **Lehrsatz.** Ein Rectangulum wird ausgemessen, wann man das zum Maasstab angenommene kleine Quadrat so vielmal in demselben her-

herumlegen läßt, als das Product der Grundlinie in die Höhe, welche beede die Seite des kleinen Quadrats mißt, Einheiten in sich begreift; denn es seye *Fig.* 44. das grose Quadrat ABCD, und das kleine, das im grosen herumgelegt wird, Abcd; die Höhe AD hält drey Längen wie Ab, die Seite des kleinen Quadrats, und die Grundlinie AB hält fünf solche Längen, so wird das Quadrat Abcd im grosen Rectangulo 3.5. oder 15, oder AD.AB mal herumgelegt werden können; folglich wird der Inhalt des Rectanguli ABCD = AB.AD.Abcd oder in Zahlen 3.5.Abcd seyn.

§. 511. **Zusatz.** Wenn Abcd = 1, so ist der Inhalt des Rectanguli AB.CD, oder 15. Man muß aber diese Einheit immer als eine Quadratfläche ansehen.

§. 512. **Zusatz.** Die gewöhnliche Art, sich hier auszudrucken, da man sagt, das Product aus der Höhe und der Grundlinie seye der Inhalt des Rechtecks, ist also falsch, wenn Abcd nicht im Sinn als die Einheit der messenden Fläche hinzugedacht wird, welche mit dem obigen Product multiplicirt erst die Fläche gibt; denn sonst gibt eine Linie mit einer Linie multiplicirt, wieder eine Linie, und niemalen eine Fläche.

§. 513. **Zusatz.** Wenn die auszumessende Fläche ein Quadrat ist, so darf man nur die Grundlinie mit sich selbst multipliciren, dieses Product in Abcd gibt die Fläche des Quadrats. Das ist, wenn Abcd = 1, das Quadrat der Grundlinie, oder überhaupt einer Seite, nach den oben gegebenen Bestimmungen §. 510.

§. 514. **Zusatz.** Eine Quadratruthe im geometrischen Maas ist 10 Schuh hoch und lang, folglich hält eine Quadratruthe 10.10 = 100 Quadratschuhe; eben so, ein Quadratschuh 100 Quadratzoll; und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien; dahero die Progreßion im Flächenmaas nicht von 10 zu 10, wie bey den Längen, sondern von 100 zu 100 gehet; z. E. 3456043''' sind im Quadratmaas $3^{\circ}\,45'\,60''\,43'''$.

§. 515. **Zusatz.** Ein schiefes Parallelogramm wird ausgemessen, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt, weil ein jedes schiefwinklichtes Parallelogramm in ein rechtwinklichtes sich verwandeln läßt nach §. 487. ein solches aber auf die gemeldte Weise ausgemessen wird §. 510.

§. 516. **Zusatz.** Und weil ein jedes Dreyeck die Hälfte eines Parallelogramms ist, das einerley Grundlinie und Höhe mit dem Dreyeck hat, so ist der Inhalt eines Dreyecks das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe; das ist nach *Fig.* 45. $\frac{AD.EB}{2}$, oder $\frac{1}{2}$ AD.EB. oder $\frac{1}{2}$ EB.AD.

§. 517. **Zusatz.** Ein Trapezium läßt sich durch die Diagonallinie in zwey Dreyecke theilen, folglich ist sein Inhalt die Summe des Inhalts der zwey Dreyecke, daraus es besteht.

§. 518. **Zusatz.** Wenn ein Trapezium zwo parallele Seiten hat, wie *Fig.* 45. so ist der Inhalt die Summe der zwo parallelen Seiten multiplicirt in ihre halbe Höhe; oder (AD + BC).$\frac{1}{2}$BE. Dann AD.$\frac{1}{2}$BE = △ABD, und BC.$\frac{1}{2}$BE = △BDC, aber

aber ABD + BDC = ABCD, folglich (AD + BC) $\frac{1}{2}$BE = ABCD.

§. 519. **Zusatz.** Eine jede vieleckigte Figur, sie mag regulär oder irregulär seyn, läßt sich durch die Diagonallinien in Dreyecke eintheilen, folglich kann man auf eben diese Weise ihren Inhalt finden, welcher dem Inhalt aller Dreyecke, aus dem sie besteht, gleich seyn wird.

§. 520. Anm. Wir haben hier nur das nöthigste, was aus der Lehre von Verwandlung der Figuren unmittelbar fließt, vorgetragen, das weitere gehört in die practische Geometrie, welche im folgenden erläutert werden solle, und wo man die hieher gehörige practische Kunstgriffe nicht vergessen wird.

Die Aehnlichkeit der Dreyecke und der Figuren überhaupt.

§. 521. **Erklär.** Aehnliche Figuren sind, welche in nichts von einander unterschieden sind, als blos in der Größe, oder in welchen alles einerley ist, ausgenommen die Größe; wie z. E. zween Cirkel, ein groser und ein kleiner; wo dieses nicht statt hat, so sind sie unähnlich.

§. 522. **Lehrsatz.** Zwey Parallelogramme von einerley Höhen verhalten sich, wie die Grundlinien, wobey aber vorausgesetzt wird, daß die Verhältniß rational sey.

Satz. *Fig.* 44. *B.*

ABEF : BCDE = AB : BC.

Beweis.

ABEF = AB . BE und BCDE = BC . BE;

folgl. ABEF : AB . BE = BCDE : BC . BE. und versetzt

ABEF : BCDE = AB . BE : BC . BE.

: BE

ABEF : BCDE = AB : BC.

§. 523. **Zusatz.** Wenn die Grundlinien gleich sind, so verhalten sie sich wie die Höhen; welches auf eben diese Art erwiesen wird.

§. 524. **Zusatz.** Weil die Dreyecke die Hälften sind von Parallelogrammen, die einerley Grundlinien und Höhe mit ihnen haben, so verhalten sich auch die Dreyecke von einerley Grundlinie, wie ihre Höhen, das ist *Fig.* 44. β. ΔABE : ΔBCD = AB : BC, oder wenn sie einerley Höhe haben, wie ihre Grundlinien.

§. 525. **Zusatz.** Ist die Verhältniß nicht rational, oder kann kein Theil von AB, man mag ihn auch noch so klein annehmen, ein gemeinschaftlicher Theil werden, der m und n mal genommen die beede Linien genau messe, so nimmt man unendlich kleine Theile an, die man Elemente nennt, damit man auch in solchem Fall die Wahrheit der Verhältniß behaupten könne, indeme der Fehler alsdann geringer wird als jede angebliche Grösse.

§. 526. **Lehrsatz.** Wenn man in einem Dreyeck, wo man will, eine Parallellinie mit der Grundlinie ziehet, so sind die durch die Parallellinie abgeschnittene Stücke der beeden Seiten proportionell.

Satz. *Fig.* 50.

AD : DB = AE : EC.

Bew.

ΔADE : ΔDEB = AD : DB §. 524.

ΔDEB = ΔDEC §. 493. diesen substgibt

ΔADE : ΔDEC = AD : DB

ΔADE : ΔDEC = AE : EC. §. 524.

AD : DB = AE : EC.

§. 527.

§. 527. **Lehrsatz.** In den zweyen durch diese Parallellinie entstehenden Dreyecken sind jede zwo Seiten des einen Dreyecks den zwo Seiten des andern proportionell.

Satz. *Fig.* 56.

I. Fall.

AD : AE = AB : AC.

Bew.

AD : DB = AE : EC nach §. 526.
AD : AD+DB = AE : AE+EC. d. i. in der Fig.
AD : AB = AE : AC. und versetzt
AD : AE = AB : AC.

II. Fall.

AB : BC = AD : DE.

Beweis.

Wenn man EH mit DA parallel ziehet, so ist BH = DE, nach §. 461. und die Proportion wie vorher; Da man nur C für die Spitze und AB für die Grundlinie annimmt: folglich

CB : HB = CA : EA. das ist, weil HB = DE

CB : DE = CA : EA. ferner
BA : DA = CA : EA. folglich

CB : DE = BA : DA. und versetzt
CB : BA = DE : DA. oder umgekehrt
AB : BC = AD : DE.

§. 528. **Anm.** Man kann den zweyten Fall, wie auch den ersten unmittelbar aus der Euclideischen Figur beweisen; es sey *Fig.* 60. zu beweisen, daß CB : AB = CE : DE, so ist der Beweis folgender:

△DAB : △CDB = DA : DC §. 524.
△ {DBE : △CDE = DA : DC.
{DAE weil △DAE = DBE. §. 493.

△DAB : △CDB = △DBE : △CDE.
DAE + CDB : CDB = DBE + CDE : CDE das ist in der Figur

△ AB : △CDB = △CDB : △CDE nun ist
△CAB : △CDB = AB : DE also

△CDB : △CDE = AB : DE.
△CDB : △CDE = CB : CE §. 524; folglich

AB : DE = CB : CE. das ist versetzt
AB : BC = DE : CE und umgekehrt
CB : BA = CE : ED. Diesen Beweis habe nach dem Euclides in meinen Amœnit. Acad. 1754. und hernach in den ersten Gründen der mathem. Wissenschaften S. 426. folgg. gegeben.

§. 529. **Zusatz.** Die angeführte Proportionen *Fig.* 56.

nemlich I. AD : DB = AE : EC.
II. AD : AE = AB : AC.
III. AD : DE = AB : BC.

geben durch die nach §. 275. verstattete Versetzungen und Veränderung noch verschiedene andere Verhältnisse, die sich aber allesamt auf die drey Hauptproportionen gründen.

§. 530. **Zusatz.** Wo diese Proportionen statt haben, da ist allemal DE mit BC parallel.

§. 531. **Lehrsatz.** Wenn in zweyen Dreyecken alle drey Winkel einander gleich sind, so sind die Triangel ähnlich, und die gleichen Winkeln opponirte Seiten proportionell. Denn es sey *Fig.* 57. in den Dreyecken BAC, CDE, der Winkel ABC = D: E, der Winkel A = D, folglich auch der dritte dem dritten gleich §. 468. so wird CD mit BA parallel seyn nach §. 457. welches bey allen Dreyecken dieser Art klar ist, weil man allemal zwo Seiten, die gleichen Winkeln opponirt sind, wie BC und CE, in eine gerade Linie zusammen setzen kann. Daß aber in diesem Fall CD mit BA parallel, erhellet daraus,

aus, weil nach der Vorausſetzung der Winkel DCE = ABC, und A = D; in welchem Fall alſo CD nothwendig mit AB, und die verlängerte Linie EF mit AC parallel iſt, nach §. 457. folglich wird nach dem vorhergehenden Lehrſatz,

BA : BC = AF : CE;
AF = CD daher

BA : BC = CD : CE. und eben ſo
BC : AC = CE : DE folglich auch nach §. 278.

BA : AC = CD : DE.

§. 532. **Zuſatz.** Sind in zweyen Dreyecken zween Winkel einander gleich, ſo hat die obige Proportion ſchon ſtatt: denn wenn zween Winkel einander gleich ſind, ſo iſt auch der dritte dem dritten gleich §. 468.

§. 533. **Lehrſatz.** Wenn ein Winkel wie AEB *Fig.* 58. durch die Linie DE in zween gleiche Winkel AED, und DEB getheilt wird, ſo verhalten ſich die zwo Seiten des Dreyecks AE, und AB, wie die zween Abſchnitte der dritten Seite, welche durch DE abgeſchnitten werden. Denn man verlängere AE nach C, bis EC = BE, und ziehe die Linie EB; ſo wird der Beweis folgender maſen ſich ergeben.

Satz. *Fig.* 58.

AE : EB = AD : DB.

Beweis.

AEB = o + x nach §. 470.
o = x §. 439.

AEB = 2x
AEB = 2AED ex conſtructione

$2AED = 2x$

$:2$

$AED = x$ folglich

DE parallel BC dahero

$AE : EC = AD : DB$ nach §. 531. aber

$EC = EB$ nach der Construction, folglich

$AE : EB = AD : DB.$

§. 534. **Zusatz.** Wenn diese Proportion statt hat, so ist der Winkel AED die Hälfte von AEB.

§. 535. **Lehrsatz.** Eine auf den Diameter des Cirkels von der Peripherie herabgefällte Perpendicularlinie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten (Segmenten) des Diameters, die dadurch bestimmt werden.

Satz. *Fig.* 59.

$AD : DE = DE : DB.$

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpunkt den Radius CE; so ist $CE^2 = ED^2 + DC^2$ und $CE^2 - DC^2 = ED^2$ nach §.

Man setze $CE = r$

$DC = a$

$DE = x.$ so ist

nr. I. $CE^2 - DC^2 = ED^2$ in kleinen Buchstaben ausgedruckt

$r^2 - a^2 = x^2 = ED^2.$

Es ist ferner

nr. II. $CB = AC = CE = r$; folglich in der Figur $AC - CD = AD$ das ist $r - a = AD.$ und $CB + CD = DB$ das ist $r + a = DB.$ also ist $(r - a) \cdot (r + a) = AD \cdot DB.$

das

das ist, nach §. 147. $r^2 - a^2 = AD . DB$
aber nr. 1. $r^2 - a^2 = ED . ED$ oder ED^2.

$AD . DB = ED . ED$. dahero
$AD : ED = ED : DB$.

§. 536. Anm. Eben diese Verhältniß läßt sich auch aus dem obigen Beweis §. 531. herleiten, weil das △AED, dem Dreyeck DEB, und beede dem Dreyeck AEB ähnlich sind. Denn *Fig.* 59. ist der Winkel AEB ein rechter, wie ADE, und EDB es auch sind nach der Voraussetzung, folglich sind alle drey gleich; der Winkel B ist den △ABE und DBE gemeinschaftlich; folglich ist auch der dritte dem dritten gleich, und △AEB ∽ △DEB ∽ △ADE; dahero AD : DE = DE : DB.

§. 537. **Lehrsatz.** Wenn ein Winkel, wie BCA *Fig.* 62. einen Cirkel durch seine zween Schenkel schneidet, und mit den verlängerten Schenkeln auf dem Bogen BA stehet, so verhalten sich die Segmente der Schenkel ausser der Peripherie umgekehrt wie die ganze Schenkel.

Satz. *Fig.* 82.

$CE : CD = CA : CB$.

Beweis.

$o + x = 180°$ nach §. 443.
$x + y = 180°$ nach §. 500.

$o + x = x + y$
$x = x$ subtr.

$o = y$.
$C = C$ folglich

△CED ∽ △CAB. nach §. 532. dahero
$CE : CD = CA : CB$.

§. 538. **Lehrsatz.** Wenn an dem einen Ende des Diameters eine Perpendicularlinie oder Tangente aufgerichtet wird, welcher eine vom andern Ende des Cirkels gezogene, und den Cirkel schnei-

schneidende Linie, als die Hypothenuse des Dreyecks, begegnet, so ist die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen dem Segment der Hypothenuse ausser dem Cirkel, und zwischen der ganzen Hypothenuse.

Satz. *Fig.* 61.

$$HB \cdot HI = HA^2$$

Beweis.

$$HI \cdot IB = AI^2$$

$$AI^2 = HA^2 - HI^2$$

$$HI \cdot IB = HA^2 - HI^2$$

$$HI^2 = HI^2$$

$$HI \cdot IB + HI^2 = HA^2$$

das ist $(HI + IB)\,HI = HA^2$

das ist in Fig. $HB \cdot HI = HA^2$

§. 539. **Zusatz.** Das Quadrat der Tangente ist also dem Product der Hypothenuse in ihr ausserhalb des Cirkels fallendes Segment gleich, das ist in der Figur $BH^2 = HA \cdot HI$.

§. 540. **Anm.** Diese drey Lehrsätze haben in der Trigonometrie und höhern Geometrie ihren Nutzen, und sind wohl zu merken, unerachtet sie in den gewöhnlichen geometrischen Schriften nicht vorkommen.

§. 541. **Zusatz.** Weil die Seiten, welche in zwey Dreyecken gleichen Winkeln opponirt sind, ähnlich liegende Seiten (latera homologa) heissen, so werden die bisherige Lehrsätze kürzlich so ausgedruckt, daß man sagt, in ähnlichen Dreyecken seyen die ähnlich liegende Seiten proportionell.

§. 542. **Zusatz.** Aus drey gegebenen Seiten kann man nach §. 272. die vierte, und aus zwo, nach §. 274. die mittlere Proportionalseite finden, wie in der practischen Geometrie, wo auch die proportionirliche Theilung der Linien vorkommt, weiters erläutert werden soll.

§. 543. **Lehrsatz.** Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten (Triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum.) Denn es seyen die beeden Dreyecke *Fig.* 66. α. β. einander ähnlich; man ziehe ihre Höhen BD, bd, so wird man ihren Inhalt durch $\frac{AC \cdot BD}{2}$, und $\frac{ac \cdot bd}{2}$ ausdrücken können; woraus man den Beweis des Lehrsatzes bald finden kann.

Satz. *Fig.* 66. α. β.

$$\Delta ABC : \Delta abc = AC^2 : ac^2.$$

Beweis.

nr. I. $\Delta ABC \sim \Delta abc$ nach der Voraussez. dahero

$$\left.\begin{array}{l} ab : AB = bd : BD \\ ab : AB = ac : AC \end{array}\right\}$$ nach §. 527. dahero

$$ac : AC = bd : BD$$

folglich $\frac{AC \cdot bd}{ac} = BD$. §. 272.

nr. II. $\Delta ABC : \Delta abc = BD \cdot AC : bd \cdot ac$ nach §. 516.

es ist aber nach nr. I.

$BD = \frac{AC \cdot bd}{ac}$ folgl. subst.

$$\Delta ABC : \Delta abc = \frac{AC \cdot AC \cdot bd}{ac} : bd \cdot ac$$

$$\Delta ABC : \Delta abc = \frac{AC \cdot AC \cdot bd : bd \cdot ac \cdot ac}{ac} : bd$$

$$\Delta ABC : \Delta abc = AC \cdot AC : ac \cdot ac = AC^2 : ac^2.$$

§. 544. **Zusatz.** Aehnliche Figuren verhalten sich aus gleichem Grunde wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten, denn sie lassen sich in ähnliche Dreyecke durch die Diagonale theilen, folglich gilt von ihnen, was von den Dreyecken gesagt worden. Dahero *Fig.* 63. α. β. ABCDEF : abcdef $= AB^2 : ab^2$.

Dann $\Delta AFB : \Delta afb = AB^2 : ab^2$ §. 543. weil ferner

$$AFB + FBC + FCE + ECD : afb + fbc + fce + ecd = AFB : afb$$

das ist ABCDEF : abcdef = Δ AFB : afb

---

so ist ABCDEF : abcdef $= AB^2 : ab^2$.

§. 545. **Zusatz.** Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Höhen, *Fig.* 66. weil die Höhen auf ähnliche Weise bestimmt werden.

§. 546. **Zusatz.** Eben das gilt von andern ähnlichen Figuren, wo eine Linie auf eine mit den homologen Seiten ähnliche Weise bestimmt wird; so verhalten sich die Cirkel, weil sie alle ähnlich sind, wie die Quadrate der Diameter; wie es im folgenden vom Cirkel besonders solle vorgetragen werden.

§. 547. **Lehrsatz.** Wenn zwo Sehnen eines Cirkels einander schneiden, so sind die Producte ihrer Segmente beederseits einander gleich; und die Segmente sind wechselsweise proportionell.

Satz.

Satz. *Fig.* 64.

$AG.GB = EG.GD.$

Bew.

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{2}BE \\ D = \frac{1}{2}BE \end{array}\right\} \text{ §. 478.}$$

$A = D$

$AGE = DGB$ sind Vertic. Winkel.

$\triangle AEG \sim \triangle DBG$ folglich

$AG : EG = GD : GB$

daher

$AG.GB = EG.GD.$

§. 548. Anm. Dieser Lehrsatz ist besonders wegen seiner Allgemeinheit zu merken; in den gewöhnlichen geometrischen Lehrbüchern kommt er selten so allgemein vor; man findet gemeiniglich nur den besondern Fall, wenn eine Sehne den Diameter perpendicular schneidet, da dann das Product der Segmente dem Quadrat der halben Sehne, das ist, dem Product der Segmente der Sehne gleich ist; wie aus §. 535. unabhängig von diesem gegenwärtigen Lehrsatz erhellet. Es ist aber nicht nur dieser Fall bey dem Diameter, als der grösten Sehne, sondern bey allen Sehnen, und nicht nur, wenn sie sich unter einem rechten, sondern unter allen nur möglichen Winkeln schneiden, hier erwiesen. Herr Prof. Sulzer zu Berlin hat den Begriff der Schönheit, in sofern der Verstand sie erkennt und deutlich vorstellt, aus diesem Lehrsatz erläutert, und gezeigt, wie das Vergnügen an der Schönheit von dem ersten an bis auf den letzten allgemein erwiesenen Fall zunehme, und sich auf deutliche Begriffe gründe, da man sonsten das Schöne mehr in der undeutlichen Vorstellung einer Sache gesucht hat.

§. 549. Anmerk. Uebrigens empfehlen wir diese Lehre von den Verhältnissen und Proportionen dem Nachdenken des Lesers um so mehr, als sie, wie wir in der Arithmetik schon gemeldt, und wie alle Verständige es wissen, die Seele der ganzen Mathematik ist, und in alle Theile derselben einen ungemein grosen Einfluß hat.

Von

Von dem Cirkel, dessen Verwandlung und Ausmessung.

§. 550. **Lehrsatz.** In einem jeden Cirkel sind die Sehnen gleicher Bogen gleich. Denn man ziehe *Fig.* 48. die Sehnen DE, AB, und die Radios DC, CE, AC, CB, so werden die Winkel o und x gleich seyn, weil nach der Voraussetzung die Bogen gleich sind.

Satz. *Fig.* 48.

DE = AB.

Bew.

DC = CA } sind Radii.
CE = CB }

o = x nach der Voraussetzung

$\triangle$DCE = $\triangle$ACB.

AB = DE.

§. 551. **Zusatz.** Wenn die Sehnen gleich sind, so sind auch die Bogen gleich; denn in diesem Fall sind in den beeden Dreyecken *Fig.* 48. alle drey Seiten einander gleich, folglich o = x, dahero auch die Bogen, welche diese Winkel messen.

§. 552. **Lehrsatz.** Eine Perpendicularlinie, welche eine Sehne in zween gleiche Theile theilet, gehet verlängert durch den Mittelpunkt des Cirkels, und theilet ihn in zween gleiche Theile; welches klar wird, wenn man *Fig.* 49. die Sehnen AD, AC, DB, und BC ziehet.

Satz. *Fig.* 49.

DC = Diameter.

Bew.

Beweis.

AGD = DGB
AG = GB } nach der Voraussetzung
nr. I. GD = GD

$\triangle ADG = \triangle DBG$ nach §. 426. folglich

AD = DB.

ferner

nr. II. AGC = BGC
AG = GB
GC = GC

$\triangle ACG = \triangle BCG$. nach §. 426. folglich

$\overline{AC} = \overline{BC}$

nun ist

AD = DB nach nr. I.
AC = BC nach nr. II. dahero

$DA + AC = DB + BC$. folgl. auch die Bögen §. 551. deren Summe der ganze Cirkel; dahero

$DA + AC = \frac{1}{2}$Circ.
und $DB + BC = \frac{1}{2}$Circ. folglich

DC = Diam.

§. 553. **Zusatz.** Durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, wird daher allemal ein Cirkel bestimmt; denn *Fig.* 50. seyen die Punkten A, B, D, man ziehe die Linien AB, und BD, zwischen diesen Punkten, man theile sie in zwey gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungs-Punkte die Perpendicularlinie IF, GH, so sind es zween Diameter nach dem vorhergehenden §. 552. zween Diameter eines und eben desselben Cirkels aber

schneiden sich nirgend als im Mittelpunkt, folglich ist C der Mittelpunkt und CA der Radius.

§. 554. Erklär. Ein Cirkel wird in eine geradelinigte Figur hin beschrieben, wenn jede Seite der geradelinigten Figur die Peripherie des Cirkels berührt; und eine Figur wird in einen Cirkel hinein beschrieben, wenn ein jedes Eck der Figur in der Peripherie des Cirkels sich endigt.

§. 555. Lehrsatz. In ein jedes Dreyeck läßt sich ein Cirkel beschreiben; welches geschiehet, wenn man *Fig.* 47. die Winkel A und D in zween gleiche Theile theilet, und aus dem Punkt C wo sie einander durchschneiden, die Perpendikul CB und CE auf die Seiten des Dreyecks fällt.

Satz. *Fig.* 47.

FC, EC, BC, sind Radii des eingeschriebenen Cirkels.

Beweis.

nr. I. CED = CBD sind rechte; ex construct.
x = o ex construct. jeder ½EDB.
CD = CD folglich nach §. 423.

ΔCDE = ΔCDB: dahero
CB = CE. eben so ist

---

nr. II. AFC = ABC.
n = r
AC = AC

ΔACF = ΔACB: folglich
FC = CB. da nun nach nr. I.
auch CE = CB so ist

FC = CE = CB. also drey Radii, und der

der Mittelpunkt C; aus C kann man also durch die drey Punkte B, F, E, den Cirkel beschreiben, der die obige Eigenschaften hat, daß nemlich der eingeschriebene Cirkel alle drey Seiten des Dreyecks berührt.

§. 556. Anm. Auf eine nicht viel verschiedene Weise wird das Problem περι επαφων, das unter den Alten so berühmt war, und von dem Franc. Vieta aufgelößt worden ist, wie wir in der Geschichte dieses Hauptstücks gemeldet, ohne sonderliche Mühe blos geometrisch aufgelöset.

§. 557. **Zusatz.** Weil ein reguläres Polygon lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, so kann man es sich als eine in den Cirkel eingeschriebene Figur vorstellen, dessen Seiten die Sehnen des Cirkels sind.

§. 558. **Zusatz.** Und weil die Seiten alle, das ist, im Cirkel, die Sehnen gleich sind, so sind auch die Winkel am Mittelpunkt alle gleich; das ist, wenn man eine hat, so hat man alle.

§. 559. **Lehrsatz.** Aus der Anzahl der Seiten eines regulären Vielecks wird der Centriwinkel und der Polygonwinkel, das ist der Winkel, den zwo Seiten mit einander machen, bestimmt. Denn wenn die Anzahl der Seiten n ist, so ist der Centriwinkel *Fig.* 67. $ACB = \frac{360°}{n}$ und der Polygonwinkel $ABD = 180° - \frac{360°}{n}$. Denn I. alle Winkel um den Punkt C herum machen 360°; es sind aber n gleiche Winkel um C herum; also hält einer $\frac{360}{n}$; folglich ist der Centriwinkel $ACB = \frac{360°}{n}$.

II. Das Dreyeck ACB ist gleichschenklicht, weil AC, CB

CB Radii sind; folglich sind die Winkel r und m einander gleich. Weil aber nach der Voraussetzung BD = AB, so ist △CBD = CAD; folglich o = r. Nun ist m + o = ABD dem Polygonwinkel; daher ro, wenn man gleiches substituirt, der Polygonwinkel = $180^\circ - \frac{360}{n}$, weil $r + m = 180^\circ - \frac{360}{n}$ ist.

§. 560. Zus. Wenn die Sehne dem Radius gleich ist, so ist das Polygon ein reguläres Sechseck, denn alsdann ist das △ADB gleichseitig, folglich der Centriwinkel = 60; aber $\frac{360}{60} = 6$; daher ein Sechseck beschrieben wird, wenn man den Radius sechsmal in der Peripherie herumträgt.

§. 561. Zus. Wenn die Zahl der Seiten gerad ist, so macht die Hälfte der Centriwinkel 180°, und das Polygon wird durch jeden continuirten Radium in zween gleiche Theile getheilt.

§. 562. Zusatz. Man kann die Fläche eines regulären Polygons finden, wenn man die Summe seiner Seiten, das ist n Seiten mit der halben Höhe CH multiplicirt; denn man kann sich ein Polygon darstellen, als ob sein Umfang in eine gerade Linie ausgedehnt wäre, auf welcher als auf der Grundlinie alle *Fig.* 67. mögliche Dreyecke stünden; diese werden in eines verwandelt, dessen Inhalt das Product aus der Grundlinie in die halbe Höhe ist. Nach *Fig.* 55.

§. 563. Lehrsatz. Weil der Cirkel ein reguläres unendliches Vieleck, so kann man sich ihn eben so vorstellen; und weil die Grundlinien der unendlich kleinen Dreyecke unendlich klein sind, so kann

man

man ihre Höhe für den Radius annehmen; dahero sein Inhalt die Peripherie in den halben Radius oder vierten Theil des Diameters multiplicirt ist.

§. 564. Anm. Daß dieser Begriff vom Cirkel möglich, und wie man wirklich den unendlich kleinen Theilen der Peripherie durch die Approximation nahe gekommen sey, werden wir sogleich im folgenden zeigen. Von den Polygonen aber werden wir das weitere in der Ebenen Trigonometrie mit mehrerer Deutlichkeit und desto kürzer sagen können.

§. 565. **Lehrsatz.** Ein jedes reguläres oder irreguläres Polygon läßt sich durch Diagonallinien, die einander nicht durchkreuzen, in so viel Dreyecke theilen, als es Seiten hat, weniger zwey. *Fig.* 63. α. Denn so viel sich nicht durchkreuzende Diagonalen lassen sich ziehen, als es Seiten hat, weniger drey, und diese Diagonalen bringen allemal ein Dreyeck wieder heraus, z. E. das Viereck hat eine Diagonale, und dadurch zwey Dreyecke, das Fünfeck zwo Diagonale, und dadurch drey Dreyecke, das Sechseck drey Diagonale, und dadurch 4 Dreyecke. u. s. w.

§. 566. **Lehrsatz.** In einem jeden Cirkel kommen die Sehnen ihren zugehörigen Bogen desto näher, je kleiner sie sind. Denn es sey *Fig.* 54. der Bogen ADB gegeben, seine Sehne ist AB, man theile den Bogen ADB in zween gleiche Theile in D; so ist die Hälfte des Bogen nun AFD, und die Sehne AD, welche schon gröser als AE, die Hälfte der vorigen Sehne; theilt man AFD wieder in zwey gleiche Theile, so wird die Sehne davon abermal gröser werden als $\frac{1}{2}$AD; folglich dem Bogen selbst immer näher kommen, je kleiner er wird. Das ist, der Unterschied zwischen der Sehne und dem Bo-

gen wird durch unendlich viele Halbirungen zuletzt kleiner werden als eine jede angebliche Größe.

§. 567. **Zusatz.** Ein jedes reguläres Vieleck, das in den Cirkel eingeschrieben ist, läßt sich verdoppeln, oder in eins verwandeln, das zweymal so viel Seiten, und diß in eines, das viermal so viel Seiten hat u. s. w. Denn es sey *Fig.* 54. CA der Radius, der gegeben ist, AB die Seite des gegebenen Vielecks, so ist AD die Seite des Vielecks, das noch so viel Seiten hat; und diese Seite läßt sich aus AB der Seite des vorigen regulären Vielecks und aus AC, dem Radius, finden. Denn $AD^2 = AE^2 + ED^2$; welche beede letztere Quadrate bekannt sind.

Satz. *Fig.* 54.

$AD^2 = AC^2 + DE^2 = 1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4}AB^2}$ wenn $AC = 1$.

Bew.

nr. I. $CE = \sqrt{(CA^2 - AE^2)}$ aber
$AE^2 = \frac{1}{4}AB^2$ substituirt, gibt
$\overline{CE = \sqrt{(CA^2 - \frac{1}{4}AB^2)}}$

nr. II. $DE = CD - CE$
$CD = CA$ substituirt
$\overline{DE = CA - CE = CA - \sqrt{(CA^2 - \frac{1}{4}AB^2)}}$
$= 1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4}AB^2.)}$

§. 568. **Zusatz.** Eben so läßt sich aus dem gefundenen AD die Seite des Vielecks, das zweymal so viel Seiten als dieses, oder viermal so viel Seiten als das erste hat.

§. 569. **Zusatz.** Wenn man nun die unendlich kleine Seite des Vielecks dem unendlich kleinen Cirkelbogen gleich setzt, so wird der Radius die Hö-

he

he des unendlich kleinen Dreyecks seyn, wie *Fig.* 55. folglich die Summe aller dieser Dreyecke der Inhalt des Cirkels, woraus man die Peripherie und die Verhältniß des Radius, folglich auch des doppelten Radius, oder des Diameters zur Peripherie findet; welche in allen Cirkeln einerley ist, weil sie alle einander ähnlich sind.

§. 570. **Zusatz.** Man wird also zuletzt auf ein Vieleck kommen, dessen Seite kleiner ist als jede angebliche Gröse, und die dem Cirkelbogen selber so nahe kommt, als möglich ist.

§. 571. **Anm.** Auf diese Weise hat man die Quadratur des Cirkels gesucht, auch durch mancherley Abkürzungen der Rechnungen, wie Hugenius und vorher schon Ludolph von Cölln eine Verhältniß zwischen dem Diameter und der Peripherie gefunden, welche, wenn der Diameter = 1, nach der Decimalrechnung zwischen 1:3, 141 592 653 589 793 238 462 643 382 279 50 und zwischen 1:3, 141 . . . . . 51 hinein fällt. Das ist, wenn der Diameter 1 mit zwey und dreyßig angehängten Nullen ist, so ist der Diameter 3 mit den obigen angehängten 32 Zahlzeichen; die erste 31 sind richtig, und ohne Fehler, aber nur noch nicht complet, weil die Rechnung ohne Ende fortgeht. Folglich kann man nach der Ludolphischen Verhältniß alle andere angegebene oder neu erfundene, wenn man welche erfinden würde, prüfen. Wenn sie unter der Bedingung, daß der Diameter 1 mit 31 Null vermehrt ist, wohin man alle Verhältnisse reduciren kann, von den 32 Zahlzeichen der Peripherie, wie sie Ludolph von Cölln gefunden, abweichen, so sind sie offenbar falsch; ohne daß man nöthig hätte, eine weitere Untersuchung über die angegebene Verhältniß anzustellen. Denn die Ludolphische Verhältniß ist als eine Näherung oder Approximation, die bey der zwey und dreyßigsten Zahl abgebrochen wird, erwiesen, folglich ein wahrer und wirklicher Theil von der unendlichen Reyhe. Da nun dem Wahren nichts Wahres widerspricht, so muß eine jede andere Rechnung, die auf obige Weise reducirt, der Ludolphischen widerspricht, eben deßwegen falsch seyn; und auf diese Weise kann man die vorgegebene Adeptos ohne weiteres Disputiren abweisen.

§. 572. Anm. Die Möglichkeit sowohl als die Unmöglichkeit der bestimmten Quadratur des Cirkels ist noch nicht erwiesen: von der unbestimmten Quadratur des Cirkels kann man aus der höhern Geometrie zeigen, wie wir unten hören werden, daß sie was unmögliches sey; daraus aber läßt sich der Schluß auf die bestimmte Quadratur nicht machen. Inzwischen, wenn sie auch möglich ist, so ist erst die Frage: ob die Verhältniß rational oder irrational seyn würde? Wäre das letztere, so würde man aus dieser Erfindung nicht das mindeste weiter wissen, als man schon weiß. Denn eine Irrationalverhältniß erfordert, wie die Ludolphische, eine ewige Rechnung. z. E. Wenn die Verhältniß des Diameters ganz genau wäre wie $1 : \sqrt{10}$, so würde die Quadratwurzel aus 10 eine unendliche Reyhe in Decimalbrüchen geben; welche man, weil wir nicht unendlich fortrechnen können, einmal abbrechen müßte. Und allem Vermuthen nach ist diese Verhältniß irrational; wir sagen vermuthlich, denn daß sie wirklich irrational seyn müsse, ist noch nicht völlig erwiesen, obschon einige, wie Sturm Math. enucl. L. I. §. 2. Prop. 43. es bewiesen zu haben, glauben. Wäre aber, gegen alle Wahrscheinlichkeit, das Verhältniß rational, so würde der daraus zu hoffende Nutzen im gemeinen Leben und in allen Theilen der angewandten Mathematik nicht gröser seyn, als der, den man von der Ludolphischen Verhältniß hat. Und alles, was man dabey hoffen könnte, wäre dieses, daß der Beweis, nachdem er etwa ausfallen würde, nebenher zu Erfindung anderer Wahrheiten Anlaß geben könnte, wozu aber in der Mathematik und vorzüglich in der Rechnung des Unendlichen noch weit reichere Erfindungsquellen verborgen liegen.

§. 573. Anm. Ich wünschte, daß diese Betrachtung manche dunkle Köpfe, denen die Quadratur des Cirkels so nahe am Herzen liegt, daß sie Jahr und Tage blos darüber nachdenken, und bis zum Krankwerden rechnen, von dem grosen Zeitverlust bey ihrer mühsamen und unnützen Arbeit überzeugen möchte, um so mehr, wenn es oft Leute sind, welche kaum die vier Rechnungsarten verstehen, und wie Merkel einen Leibnitz einen xyz Rechner heissen, wodurch man die Sache nur verwirre; oder wenn gar der Geitz ihre Rechenkunst beseelet, und sie, ich weiß nicht was für grose Prämien sich von der Entdeckung ihres Geheimnisses versprechen, welche nirgend als in ihrem finstern Gehirn existiren; denn grose Herren werden eine Erfindung, die im gemeinen Leben keinen weitern Nutzen hat, gewiß nicht so verschwenderisch belohnen. Sind diese Gründe noch nicht hinlänglich, solche hochmüthige Adeptos von ihrem Eigensinn abzubringen, so kann man noch ausser Hrn. Prof. Kästners Warnung

(Anfangs-

(Anfangsgr. der Math. I. Th. p. 272. folgg.) vorzüglich Hrn. Prof. Krafft Dissert. de Quadratura Circuli præsertim Merkeliana, und seine Geom. sublim. Sect. III. de Circulo lesen, wo verschiedene falsche Quadraturen solcher Adeptorum erzehlt und in ihrer Blöse dargestellt werden. Erst im Jahr 1766. hat sich abermal so gar ein Professor der Mathematik, denn dem Schulcollegen zu Kalbe kann mans eher verzeihen, einfallen lassen, einen falschen und ganz unrichtigen Beweis, der schon in der vierten Ziffer von der Ludolphischen Rechnung abweicht, drucken zu lassen, und dem verdienstvollen Herrn Abbt in Closter Berga zu dediciren. Ich konnte es fast nicht begreiffen, daß ein Prof. auf dem acad. Gymnasio zu Stettin Herr Bischoff so was schreiben sollte; doch es gehört unter das seltene dieses Jahrhunderts; wie auch eine Recension dieses Lehrbuchs, worinnen man ebenfalls meine Zweifel gegen diese Adeptos mißbilligt, vornemlich aber seine grose Unwissenheit in der Mathematik verrathen hat. Es geschiehet nicht eben aus Verachtung, als vielmehr aus Mitleiden und Verschonen, sonst wollte ich den Recensenten nennen, der in die sonst berühmte Leipziger Zeitung vom Jahr 1765. nr. 70. 71. einen gar zu schlechten Artikel dißfalls hat einrücken lassen, dadurch er sich bey vielen Kennern prostituirt hat. Er wollte auch mathematisch über einen Mathematiker satyrisiren, aber dazu gehört mehr Laune, Verstand, und mathematische Wissenschaft, als er in seinem Leben nicht lernen wird. Herrn Kästner und mich nimmt er zusammen, und will nicht haben, daß unsere Schriften, so lange das Wolfische Handbuch existire, gelesen werden: diese neue Auflage und der schnelle Abgang wird ihn nebst unserer grosen Achtung gegen den Herrn von Wolf widerlegen. Ein anderer in Greiphswalde trug eben diese Sorge für Herrn Kästnern meinen besten Freund, der es noch jezo ist. Wenn doch diese Leute bedächten, daß Neid und Mißgunst nur eine Seuche der Halbgelehrten ist! Rechtschaffene Mathematiker freuen sich eben so wie rechtschaffene Theologen, wenn die Wahrheit von vielen gründlich und faßlich gelehret und bekannt gemacht wird; sie klagen nie, daß ihre Waare liegen bleibe, wenn andere auch die ihrige auslegen. Gute Waaren bleiben niemals verliegen; und meine Schriften verhalten sich zu den Kästnerischen, wie die Wolfischen Anfangsgründe zu seinen Elementen, diese haben immer den Vorzug; Herr Hofr. Kästner, mein groser Freund und Gönner, wird ihm für seine überflüssige Sorgfalt wenig Dank wissen. Und eben so würde Wolf denken, wenn er noch lebte.

§. 574. Anm. Im gemeinen Leben, und überhaupt in der practischen Mathematik, braucht man die Ludolphische Verhältniß

hältniß nicht nach allen ausgerechneten Figuren oder Zahlzeichen, insgemein nimmt man die erste drey an, und sagt, die Verhältniß des Diameters zum Cirkel sey wie 100 zu 314; eine Verhältniß, die man auswendig wissen muß; hat man sehr grose Cirkel zu messen, so nimmt man 4 Zahlen, nemlich 1000 zu 3141, oder 5 wie 10000:31415 u. s. w. bey sehr kleinen Cirkeln ist die alte schon lang bekannte Archimedeische Verhältniß wie 7 zu 22 gut genug: der Geometra hat keine nöthig, sondern folgt überhaupt der Verhältniß, wie 1 : P, wo 1 den Diameter und P die Peripherie bedeutet; wie wir sogleich hören werden.

§. 575. **Lehrsatz.** Wenn der Diameter eines Cirkels d, oder 2r genannt wird, so ist seine Peripherie, $p = d.P$ oder $2r.P$, und sein Inhalt r^2P; woferne man die Verhältniß des Diameters zur Peripherie in allen Cirkeln durch 1 : P ausdruckt. Es sey p die Peripherie, r der Radius, und der Inhalt oder area circuli a, so ist

Satz.

I. $p = 2r.P.$

Bew.

$1 : P = 2r : p$ §. 569. folgl.

$2r.P = 1.p$ d. i.

$p = 2r.P.$

II. $a = r^2.P.$

Bew.

$a = 2r.l'.\frac{2}{4}r.$ nach §. 569.

das ist

$a = 2r.P.\frac{1}{2}r = \frac{2}{2}r^2P = r^2P.$

§. 576. **Zusatz.** Wenn man $2r = d$ setzt, so ist $a = \frac{d^2P}{4}$.

§. 577. **Lehrsatz.** Die Peripherie zweyer Cirkel verhalten sich wie die Diameter oder Radii, und die Flächen wie die Quadrate der Diameter, oder der Radiorum. Denn es seyen die Peripherien p, und π, die Diameter 2r und 2ρ, die Flächen A und α, so ist

I. Satz.

I. Satz.

$p : \pi = r : \rho$

Bew.

$p : \pi = 2rP : 2\rho P$ §. 575.

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} : P$

$p : \pi = 2r : 2\rho$ und

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} : 2$

$p : \pi = r : \rho$ das ist, wie die Diameter oder ihre Hälften, die Radii.

II. Satz.

$A : \alpha = r^2 : \rho^2$

Bew.

$A : \alpha = r^2P : \rho^2P$ §. 575.

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} : P$

$A : \alpha = r^2 : \rho^2$ u. wenn man mit 4 mult.

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} : 4$

$A : \alpha = 4r^2 : 4\rho^2 = D^2 : d^2$

d. i. wie die Quadrate der Diameter oder der Radiorum.

§. 578. Anm. Setzt man für $1 : P$ die Ludolphische Verhältniß $100 : 314$, so bekommt man $D^2 : A = 100^2 : \frac{314 \cdot 100}{4}$ $= 10000 : 7850 = 1000 : 785$. welche Zahl man wegen practischer Aufgaben auch auswendig behalten kann. Aus dieser Proportion läßt sich der Inhalt des Cirkels leicht berechnen, ohne daß man vorher die Peripherie suchen dörfte.

§. 579. **Zusatz.** Weil $a = \frac{d^2P}{4}$ §. 576. so ist $\sqrt{\frac{4a}{P}} = d$, folglich kann man aus dem gegebenen Inhalt den Diameter finden. Und weil $p = 2rP$ so ist $2r = \frac{p}{P}$, folglich kann man aus der Peripherie den Diameter und Radium finden.

§. 580. **Zusatz.** Den Inhalt eines Sectors findet man, wenn man den Bogen, der gegeben seyn muß, im Längenmaas suchet, welches aus der gefundenen Peripherie sich leicht finden läßt; der Bogen sey z. E. 34°, so sagt man, wenn p gefunden, $360° : 34° = p : p \cdot \frac{34}{360}$, welches der in eine gerade Linie verwandelte Bogen seyn wird, diesen mul-

multiplicirt man mit dem halben Radius, so hat man den Inhalt des Ausschnitts oder Sectors.

§. 581. Zusatz. Weil das Quadrat des Diameters noch einmal so groß ist als das Quadrat einer Seite des auf ihm aufgerichteten gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyecks: so ist das Quadrat, das um den Cirkel herumbeschrieben wird, nochmal so groß als das Quadrat, das in den Cirkel beschrieben wird; nach §. 503.

§. 582. Lehrsatz. Die Winkel verhalten sich gegeneinander ordentlich wie die Bogen, die sie messen und umgekehrt wie die Radii, (anguli sunt in ratione directa arcuum & inversa radiorum.) Denn es seyen *Fig.* 81. die Winkel GKD, und FKD gegeben, der Radius KG sey R, und KL sey r, die allgemeine Verhältniß, die wir oben §. 575. 1 : P. nannten, seye R : P, daß für 1 gesetzt wird R; so ist die Peripherie des kleinen Cirkels $p = \frac{rP}{R}$. Hieraus wird

Satz. *Fig.* 81.

$$GKD : FKL = \frac{GD}{R} : \frac{FL}{r}.$$

Bew.

GKD : 360 = GD : P

360 : FKL = p : FL

multiplicirt

GKD . 360 : FKL . 360 = p . GD : P . FL

:360

GKD : FKL = p . GD : P . FL aber

$p = \frac{rP}{R}$ wie oben gezeigt, diß

substituirt, gibt

GKD

$$GKD : FKL = \frac{rP \cdot GD}{R} : P \cdot FL$$

$$\text{———————————} : rP$$

$$GKD : FKL = \frac{GD}{R} : \frac{FL.}{r}$$

§. 583. **Lehrsatz.** Der Ring zwischen zweyen concentrischen Cirkeln ist die Differenz der Quadrate ihrer Radiorum in P multiplicirt. Wo P des grossen, p des kleinen Cirkels Peripherie, R und r die Radii sind.

Satz.

$(R^2 - r^2)P$ = dem eingeschlossenen Ring.
(Annulo intercepto,)

Beweis.

$A = R^2P$ } §. 575. wo A, a die areæ der Cirkel
$a = r^2P$ } subtr. sind.

$A - a = R^2P - r^2P = (R^2 - r^2)P$

$A - a$ = annulo.

$(R^2 - r^2)P$ = annulo.

§. 584. **Zusatz.** Der Abschnitt des Rings PGDL verhält sich zum ganzen Ring wie GD zu 360°.

§. 585. **Lehrsatz.** Das zwischen zween Bogen von verschiedenen Cirkeln, nemlich zwischen einem Quadrat und halben Cirkelbogen enthaltene Stück AEBFA *Fig.* 65. läßt sich völlig quadriren, und ist dem gleichschenklichten Dreyeck ABC gleich.

Satz. *Fig.* 65.

AFBEA = ΔABC.

Bew.

Beweis.

Weil $AB^2 = \frac{1}{2}AD^2$, so ist der Cirkel, wovon AEB ein Bogen ist, nochmalen so groß als der Cirkel, wovon AFB ein Bogen ist; folglich ist ein Quadrat vom grosen Cirkel der Hälfte des kleinen Cirkels gleich, und also AEBC = AFBA.

AFBA = AEBC
AEBA = AEBA

AFBA — AEBA = AEBC — AEBA es ist aber aus der Figur

ΔABC = AEBC — AEBA folgl.

AFBA — AEBA = ABC aber in der Figur
AFBA — AEBA = AFBEA

AFBEA = ΔABC.

§. 586. Anmerk. Diese Quadratur schreibt sich von dem Hippocrates her, und heißt deßwegen, weil das Cirkelstück Mondförmig ist, Lunula Hippocratis; der Erfinder war ein verdorbener oder vielmehr verunglückter Kaufmann, welcher von dem Arzt Hippocrates wohl zu unterscheiden ist; Er legte sich als ein unglücklicher Kaufmann auf die Mathematik, und bekam durch diese Wissenschaft, wo nicht grösern Reichthum, doch einen grösern Namen als durch seine vorige Handthierung. Wie er denn unter den griechischen Lehrern der Mathematik, die vor Christi Geburt berühmt waren, sich einen noch währenden Namen, den aber nur die Mathematikverständige wissen, erworben hat. Zur Quadratur des Cirkels selbst trägt übrigens diese Erfindung nichts bey. Man weiß nur den Raum der zwey Cirkelbogen, davon der eine ein Theil eines doppelt so grosen Cirkels ist, der andere aber eines doppelt so kleinen, und von dessen Raumes Quadratur die Verhältniß der Quadrate der Diameter zum Inhalt ihrer Cirkel der Grund ist. Wenn man einen Cirkelabschnitt, wie ADBA *Fig.* 54. quadriren könnte, so würde die Quadratur richtiger erfunden werden. Inzwischen ist die bey nahe wahre Quadratur eines solchen Cirkelabschnitts aus §. 579. klar; denn man sucht den Ausschnitt oder Sector des Cirkels nach §. 580. ziehet das Dreyeck ACB davon ab, so hat man das Segmentum circulare oder den Abschnitt ADBA. Weitere Umstände hievon gehören in die practische

etische Geometrie. z. E. Daß unter allen Figuren von gleichem Umfang der Cirkel die größte Fläche, und wiederum die reguläre eine grösere Fläche als die irreguläre, gleichen Umfangs, und die reguläre von mehreren Seiten wieder mehr als die reguläre von weniger Seiten, daher auch aus diesem Satz der erste folgt, daß das reguläre unendliche Eck, das ist der Cirkel, unter allen Figuren gleichen Inhalts die größte Fläche haben werde. Folglich können Figuren von einerley Umfang verschiedene Flächen von verschiedener Grösse haben. Wenn die Dido mit dem aus der Ochsenhaut geschnittenen Riemen das ihr versprochene Land im Cirkularumfang umschlossen, so hat sie ungleich mehr Raum bekommen, als wenn sie den Riemen im Quadrat ausgespannt hätte; unerachtet beederseits der Umfang einerley war. Wie dann auch die Fläche einerley bleiben kann, wenn der Umfang gleich unendlich wäre. Denn zwey Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich, das eine kann ein Quadratenmäßiger Umfang seyn, das andere ein schiefes Rhomboides, daß die zwo Parallelen, die es nach der Länge einschliessen, ans Unendliche grenzen. Welches um so eher zu merken, als man in der Ausübung hier manche Fehler macht.

Die Lage der Linien gegen die ebene Flächen und der Flächen gegen einander.

§. 587. Anm. Die ebene Geometrie ist allen denenjenigen nöthig, die in den sphärischen Wissenschaften und überhaupt in der angewandten Mathematik mit Ueberzeugung was thun wollen: Weil aber zu den Figuren, welche sie erläutern, nicht nur die Perspectiv sondern auch die Malerey erfordert wird, wenn sie deutlich seyn sollen, solche aber noch nicht erkläret ist, so haben wir, um nicht vieles undeutlich zu sagen, nur eine Figur, nemlich die 68. *Fig.* zu diesem Zweck zeichnen lassen, werden aber in der Ausführung dennoch der Deutlichkeit durch körperliche oder massive Ausdrücke zu Hülfe kommen, auch die von Holz oder Chartenpapier zu schneidende Flächen nennen, woourch man der Einbildung die Sache eben so gut oder noch besser eindrucken kann, als durch Zeichnungen; denn es wird der mathematischen Schärfe gleichgültig seyn, ob der Kupferstecher oder der Formschneider die Figuren zeichnet.

§. 588. **Lehrsatz.** Wenn zween Punkte einer geraden Linie in einer ebenen Fläche liegen, so liegt

liegt die ganze Linie darinnen, und wenn drey Punkte, die nicht in gerader Linie sind, in einer und eben derselben Fläche liegen, so liegt die ganze Figur, die durch die drey Punkte bestimmt wird, z. E. ein Dreyeck, ein Cirkel, in einer solchen ebenen Fläche. Der Beweis gründet sich auf die ersten Begriffe, die wir schon erklärt haben, und kann auf einem jeden ebenen Tisch, wo man solche Punkten annimmt, einem handgreiflich gemacht werden; dahero dieser Lehrsatz auch von manchen für einen Grundsatz angenommen wird.

§. 589. **Zusatz.** Drey Punkte bestimmen also die Lage einer Ebene; und ein jedes Dreyeck liegt in einer Ebene.

§. 590. **Lehrsatz.** Wenn eine gerade Linie auf einer ebenen Fläche, oder nur auf zwo einander durchkreuzenden Linien, auf dem Durchschnittspunkt, perpendicular steht, so steht sie auf allen möglichen geraden Linien, die noch weiter durch den Durchschnittspunkt gezogen werden können, perpendicular. Die Sache ist so natürlich, daß es überflüssig wäre, einen Beweis zu geben; wenn wir auch die perspectivische Malereyen schon wirklich erkläret hätten. Man setze eine Stecknadel auf einen ebenen Tisch perpendicular, und ziehe durch den Punkt, wo die Nadel aufsteht, in der Ebene so viel gerade Linien, als man will, so werden überall mit der perpendicularen Stecknadel, die sich auf keine Seite mehr lenket als auf die andere, nach der Definition der perpendicularen Linien, rechte Winkel gemacht werden; folglich wird sie auf allen möglichen geraden Linien der Ebene perpendicular stehen.

§. 591.

§. 591. **Zusatz.** Alle auf diese Weise sich durchkreuzende Linien, auf welchen eine dritte perpendicular stehet, sind daher in einer und eben derselben Ebene befindlich.

§. 592. **Lehrsatz.** Zwo Linien, die auf einer ebenen Fläche perpendicular stehen, sind parallel. Dann man ziehe von den Endpunkten solcher Linien oder Stecknadeln eine gerade Linie in der Ebene, welche Linie verlängert die beede Perpendikel schneidet, so werden die dadurch entstehende zween rechte Winkel, innerhalb der Perpendicularlinien zusammen 180° machen; weil 2 . 90 = 180°, folglich nach §. 457. beede Perpendikel parallel seyn.

§. 593. **Zusatz.** Wenn von solchen zwo Parallellinien eine auf der Ebene perpendicular stehet, so wird auch die andere auf der Ebene perpendicular stehen.

§. 594. **Zusatz.** Wenn auf der Ebene in den Endpunkten der beeden Perpendicularen auch Parallelen gezeichnet werden, wie *Fig.* 68. so wird die Diagonal des Rectanguli, nemlich AF, nur alsdenn perpendicular auf DE seyn, wenn die Grundlinie des Parallelogramms FI mit der Parallele KL in 1 rechte Winkel macht, §. 457. und wenn zwo Parallelen mit einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel; wie man augenscheinlich sieht, wenn man drey Stecknadeln auf einer Ebene in gerader oder anderer Direction unter einerley Winkel einstecket.

§. 595. **Zusatz.** Was von den Parallelen und Perpendicularlinien gesagt worden, gilt auch von den Ebenen.

§. 596. **Zusatz.** Aus einem gegebenen Punkt über der Ebene kann man nicht mehr als eine Perpendicularlinie auf die Ebene herab fällen, welche zugleich der kürzeste Weg von dem gegebenen Punkt auf die Ebene herab ist.

§. 597. **Zusatz.** Zwischen zwo Ebenen ist der kürzeste Weg eine gerade Linie, die auf beeden Ebenen perpendicular stehet, und die man die Distanz der beeden Ebenen nennet.

§. 598. **Lehrsatz.** Man nehme auf einer Ebene zwo Parallellinien an; man fälle aus einem beliebigen Punkt über der Ebene eine Perpendicularlinie auf die eine der gegebenen Parallellinien, welche zugleich perpendicular auf die ganze ebene Fläche sey; aus eben dem angenommenen Punkt fälle man einen Perpendikel auf die andere Parallellinie, welche folglich auf die Ebene nicht parallel seyn kann nach §. 596. so wird die Linie in der Ebene zwischen den Endpunkten der Perpendikel auf beede Parallelen perpendicular seyn. Das ist *Fig.* 68. die Linie Fl; denn es sey die Ebene BC, oder ein ebener Tisch, die beede Parallellinien KL, DE. der Punkt oberhalb der Ebene A, von welchem auf KL der Perpendikel Al herabgefällt wird, der auf die Ebene BC selbst perpendicular ist; von A werde auf die andere parallele DE, der Perpendikel AF gefällt, der aber nur auf DE und nicht auf die ganze Ebene perpendicular stehen kann, von F nach l ziehe man die gerade Linie, so macht Fl mit DE bey F einen rechten Winkel.

Satz.

Satz. *Fig.* 86.

DFI = IFE = 90°

Bew.

DFI + FIK = 180° nach §. 457.

FIK = 90

DFI = 180 — 90° = 90° oder folgender massen; Wenn AF auf DE perpendicular ist, so werden von allen Punkten zwischen A und I auf F Linien gezogen werden können, die auf DE perpendicular sind, denn der Punkt A kann in die Linie AI angenommen werden wo er will; wenn er nun dem Punkt I unendlich nahe ist, indeme man sich vorstellen kann, die Linie AI sey im Punkt F an DE bevestiget, und bewege sich um die Axe und DE herum, so daß die Winkel bey F unverrückt bleiben, so fällt er mit I zusammen, folglich ist auch IF auf DE perpendicular, das ist DFI = IFE = 90°.

Oder auch apogogisch, wenn FI auf DE nicht perpendicular wäre, so müßte eine andere Linie durch F auf DE perpendicular seyn; folglich auch ein anderer Perpendikel von A auf diese Linie und auf die ganze Ebene sich fällen lassen; welches nicht möglich, weil von keinem Punkt ausser der Ebene zween verschiedene Perpendikel auf die Ebene sich fällen lassen.

§. 599. Anm. Wenn man ein hölzernes rechtwinklichtes Dreyeck sich schneiden läßt, und auf einem Tisch zwo Parallelen in der Distanz der Grundlinie ziehet, so wird man augenscheinlich sehen, daß, nur in dem Fall, wenn die Grundlinie des Dreyecks mit einer der gezogenen Parallelen auf der Ebene rechte Winkel macht, die Hypothenuse mit der andern Parallele einen rechten Winkel macht; sonst aber in keinem Fall. Dieser Lehrsatz ist besonders zu merken, weil er im folgenden, vornehmlich in der sphärischen Trigonometrie, sehr brauchbar ist.

§. 600. **Zusatz.** Wenn Fl mit lL einen rechten Winkel macht, so ist AF wie Fl auf DE perpendicular.

§. 601. **Zusatz.** Wenn Al auf der Ebene BC perpendicular stehet, so stehet die ganze Ebene durch Al darauf. Das ganze hölzerne Dreyeck AFl, oder ein Quadrant, dessen Radius Al, ist auf der Ebene BC perpendicular. Denn Al ist mit allen Linien der Ebene BC durch l perpendicular, folglich auch mit Fl, daher $FlA = 90°$.

§. 602. **Zusatz.** Und wenn die Ebene AFl auf BC senkrecht oder perpendicular steht, so ist auch Al auf BC senkrecht, und Al ist der einige Perpendikel, der sich aus A auf BC fällen läßt.

§. 603. **Anm.** Aus den bisherigen Lehr- und Zusätzen wird man die nachfolgende Erklärungen der Neigungswinkel sowohl der Linien gegen Ebenen, als der Ebenen gegen einander desto besser fassen, dahero wir diese Erklärungen auf den Beschluß versparet haben.

§. 604. **Erklär.** Der **Neigungswinkel** einer Linie gegen eine Ebene, ist der Winkel, den die Linie mit einer andern in der Ebene dergestalt gezogenen Linie macht, daß ein Perpendikel von einem nach Belieben angenommenen Punkt in der geneigten Linie auf die Linie in der Ebene herabgefällt werden kann, der sie schneidet. So ist AFl in der 68. *Fig.* der Neigungswinkel der Linie AF mit der Ebene BC, weil die in der Ebene gezogene Linie Fl mit Al einen rechten Winkel macht; eine jede andere Linie in BC, die von F aus gegen einer andern Richtung gezogen wird, würde dieses nicht leisten, folglich den Neigungswinkel nicht bestimmen.

§. 605. **Erklär.** Eben so ist der Neigungswinkel zweyer Ebenen gegen einander der Winkel CDE *Fig.* 83. wenn von einem beliebigen Punkt C der Ebene ACB auf den Durchschnitt beeder Ebenen AB ein Perpendikel CD gezogen, und eben so in der andern Ebene ABC, die Linie ED auf AB perpendicular gezogen wird, daß CD und DE im Punkt D sich begegnen. Jede andere Linie von D aus gegen eine andere Richtung wird zwar auch einen Winkel, aber nicht den Neigungswinkel der beeden Ebenen gegen einander bestimmen.

§. 606. **Zusatz.** Wenn CD nicht nur auf AB sondern auch DE perpendicular ist, so stehen beede Ebenen auf einander perpendicular.

§. 607. **Zusatz.** Zwo parallele Ebenen stossen niemalen zusammen, und machen mit einer dritten Ebene, auf der sie stehen, gleiche Neigungswinkel.

§. 608. **Zusatz.** Zwo einander durchschneidende Ebenen stehen auf einer dritten perpendicular, wenn ihre Durchschnittslinie auf der dritten perpendicular steht; und die Durchschnittslinie steht auf der dritten Ebene senkrecht, wenn die beede sich durchschneidende Ebenen auf der dritten senkrecht stehen; welches aus *Fig.* 68. erhellet, wenn man an das Dreyeck AFI ein Rectangulum nach Belieben hinsetzt, daß die Linie AI beeder Durchschnittslinie wird; wie man solches leicht mit Chartenpapier bewerkstelligen kann.

§. 609. **Anm.** Ueberhaupt werden alle die bisher vorgetragene Sätze erleichtert, und ohne Müh gefaßt werden, wenn man sich von Holz oder Chartenpapier die Ebenen unter den angeführten Bedingungen schneiden läßt, und solche so zusammen fügt, daß die Beweise der Lehrsätze auch der Einbildungs-

Kraft so sinnlich werden, als die bisherige, die wir aus den bezeichneten Figuren erläutert haben.

Allgemeine Begriffe geometrischer Cörper, oder Einleitung in die Stereometrie.

§. 610. **Erklär.** Ein Continuum, das zwischen zwo ebenen gleichen Grundflächen, und zwischen so viel Parallelogrammen eingeschlossen ist, als jede Grundfläche Seiten hat, heißt ein **Prißma** *Fig.* 73. 71. es ist dreyeckigt, wenn die Grundflächen Dreyecke; **viereckigt**, wenn die Grundflächen Vierecke sind; sind diese viereckigte Grundflächen Parallelogramme, so heißt das Prißma ein **Parallelepipedum**, *Fig.* 70. welches **schief** ist, wenn die Seitenflächen schief, und **senkrecht**, wenn die Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche stehen; das **senkrechte** wird ein **Cubus**, wenn die Seitenflächen und Grundflächen allesamt gleich sind. *Fig.* 69. Wenn die Grundfläche unendlich viel unendlich kleine Seiten hat, das ist, wenn sie ein Cirkel ist, so wird aus dem Prißma ein **Cylinder**. *Fig.* 74.

§. 611. **Erklär.** Eine Pyramide ist ein Cörper, der von einer ebenen Grundfläche, und so viel sich im Scheitel zuspitzenden Dreyecken begrenzet wird, als die Grundfläche Seiten hat. *Fig.* 72. Aus der Pyramide wird ein **Kegel**, (Conus) wenn die Grundfläche ein Cirkel ist; und der Kegel heißt abgekürzt, (conus decurtatus) wenn seine Spitze mit einer der Grundfläche parallelen Ebene abgeschnitten wird. *Fig.* 75.

§. 612.

§. 612. Erklär. Eine Kugel entsteht, wenn sich ein halber Cirkel um seinen Diameter herum, wie um eine Axe bewegt, bis er wieder in die vorige Lage kommt. Die krumme Ebene, welche die Kugel begrenzt, heißt die Kugelfläche.

§. 613. Erkl. Ein cörperlicher Winkel (angulus solidus) ist ein Winkel, der von mehr als zwo Linien eingeschlossen ist, und davon niemalen mehr als zwo in einer und eben derselben ebenen Fläche liegen können. So ist ein jedes Eck in einem Zimmer ein cörperlicher Winkel.

§. 614. Zus. Zu einem cörperlichen Winkel hat man wenigstens drey Seiten nöthig.

§. 615. Zus. Ein cörperlicher Winkel bestehet aus verschiedenen ebenen Winkeln; die Summe dieser Winkel, die den cörperlichen ausmachen, müssen allemal weniger als vier rechte Winkel oder 360° halten, sonst werden sie in eine und eben dieselbe Ebene fallen.

§. 616. Anm. Man verstehet hier auswärtsgehende Winkel, und keine einwärtsgehende; die Franzosen nennen diese zwo Gattungen von Winkeln angles rentrans und saillants.

§. 617. Erkl. Reguläre Cörper sind, die in reguläre Vielecke, die lauter gleiche Flächen und gleiche Ecke oder cörperliche Winkel haben, eingeschlossen sind.

§. 618. Zusatz. Es gibt also nur fünf reguläre Cörper, die von den Hedris oder Seiten und der Anzahl der Winkel benennt werden: nemlich 1) das Hexaedrum oder Cubus, den man teutsch den Würfel heißt, es ist in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen, und der cörperliche Winkel besteht aus

aus drey rechten oder $3 . 90 = 270°$. 2) Das Tetraedrum ist in vier gleiche gleichseitige Dreyecke eingeschlossen, der cörperliche Winkel, den je drey Dreyecke mit einander machen, ist also $3 . 60 = 180°$. 3) Das Octaedrum ist in acht gleiche gleichseitige Dreyecke eingeschlossen, davon je vier Dreyecke zusammen den cörperlichen Winkel machen, der folglich $4 . 60 = 240°$ hält. 4) Das Icosaedrum ist in zwanzig gleiche gleichseitige Dreyecke eingeschlossen, davon je fünf zusammen den cörperlichen Winkel machen, der dahero $5 . 60 = 300°$ hält. 5) Das Dodecaedrum ist in zwölf reguläre gleiche Fünfecke eingeschlossen, davon je drey den cörperlichen Winkel machen; der folglich, weil der Polygonwinkel im Fünfeck $= 180 - \frac{360°}{5} = 180 - 72 = 108°$ ist, nach dieser Rechnung $3 . 108 = 324°$ hält. Weitere reguläre Cörper gibt es nicht; denn ein cörperlicher Winkel, den 6 gleichseitige Dreyecke machen, würde $6 . 60 = 360°$ halten, folglich in eine und eben dieselbe Ebene fallen. Eben das gilt von dem cörperlichen Winkel, den vier Quadrate machen sollen; denn $4 . 90 = 360°$; sie fallen also auch in eine Ebene; und noch vielweniger würden die aus mehr Winkeln bestehende reguläre Vielecke dazu taugen; z. E. das Sechseck hat zum Polygonwinkel 120°, folglich würden drey Flächen davon, die man wenigstens haben müßte, $3 . 120 = 360°$ machen, welche schon in eine Ebene fallen.

§. 619. **Zusatz.** Die Kugel, als ein Unendlicheck, könnte man noch als den sechsten regulären Cörper ansehen, der aus unendlich viel unendlich kleinen Flächen und aus gleichen cörperlichen

Win-

Winkeln, die aus diesen unendlich vielen gleichen Flächen entstehen, zusammen gesetzt ist.

Die Verwandlung der Cörper.

§. 620. **Lehrsatz.** Ein schiefes Parallelepipedum kann in ein senkrechtes verwandelt werden, das ihm vollkommen gleich ist, wenn es nur einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Oder zwey Parallelepipeda, die einerley Grundfläche und Höhe haben, sind einander gleich. *Fig.* 70.

Satz. *Fig.* 70.

FGHKICDR = FGHKNABS.

Beweis.

DFASBDR = CGKNACI.
CLMSB = CLMSB subtr.

DFASBDR—CLMSB = CGKNACI—CLMSB
d. i. in der Figur
DFLMIC = BLGKNA. ferner ist
HFLMKG = HFLMKG addirt

DFLMIC + HFLMKG = BLGKNA + HFLMLG
d. i. in der Figur
FGHKICDR = FGHKNABS.

§. 621. **Zusatz.** Ein jedes Parallelepipedum läßt sich durch die Diagonallinie in zwey gleiche dreyeckigte Prißmata verwandeln, und jedes ist die Hälfte von einem Parallelepipedo, das gleiche Höhe und Grundfläche hat.

§. 622. **Zusatz.** Ein jeder Cubus läßt sich in ein schiefes Parallelepipedum verwandeln, das mit dem Cubo gleichen Inhalts ist.

§. 623. **Zusatz.** Ein vieleckigtes Prißma läßt sich durch die Diagonallinie in so viel dreyeckigte verwandeln, als die Grundlinie Seiten hat, weniger zwey. §. 519. Die Summe dieser Prißmatum ist dem Inhalt des vieleckigten gleich.

§. 624. **Zus.** Weil der Cylinder als ein unendlicheckigtes Prißma angesehen werden kann, so kann auch der Verstand diese Verwandlung vom Cylinder denken.

§. 625. **Lehrsatz.** Ein jedes dreyeckigtes Prißma läßt sich in drey vollkommen gleiche Pyramiden von einerley Höhe und Grundfläche verwandeln. Denn man darf sich nur ein dreyeckigtes Prißma von Holz schneiden lassen, und solche durch die Diagonallinien der Seitenflächen schneiden, so wird man drey gleiche Pyramiden bekommen. Wie solches durch den Augenschein bey einem hölzernen Prißmate bewiesen werden kann: das nöthigste, was den Schnitt betrifft, ersiehet man auch aus *Fig.* 71.

§. 626. **Zus.** Eine dreyeckigte Pyramide ist also der dritte Theil eines dreyeckigten Prißmatis, das einerley Höhe und Grundfläche mit ihm hat.

§. 627. **Zus.** Weil ein vieleckigtes Prißma in lauter dreyeckigte durch die Diagonalen sich verwandeln läßt, so gilt dieses auch von der Pyramide; und eine vieleckigte Pyramide von lauter ausgehenden Winkeln wird der dritte Theil eines eben so vieleckigten Prißma seyn.

§. 628. **Anm.** Die Bestimmung von ausgehenden Winkeln setzen wir hinzu, weil von diesen eigentlich die Rede ist; welches Euclides supponirt, dahero Herr le Sage Hist. de l'Acad. Roi. des Scienc. à Paris 1762. unseres Bedenkens die davon handelnde Stelle des Euclides nicht für fehlerhaft oder unterschoben halten dürfte; weil der Beweis von einwärtsgehenden Winkeln nicht statt hat, und Euclides diese Bestimmung nicht beygesetzt:

Uns

Uns dünkt, er hat sie supponirt, weil von solchen Winkeln eigentlich die Rede ist. Unerachtet er bekannter massen in cörperlichen besonders conischen Schnitten nicht so glücklich, so wollen wir doch dieses zu seiner Entschuldigung nicht anführen.

§. 629. **Lehrsatz.** Weil ein Kegel als eine Pyramide angesehen werden kann, deren Grundfläche unendlich viel Ecke hat, so kann man auch den Kegel als den dritten Theil des Cylinders ansehen, der mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat.

§. 630. **Zusatz.** Eine Kugel läßt sich, wenigstens durch den Verstand, in eine Pyramide verwandeln, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und die Höhe der Radius ist.

§. 631. **Lehrsatz.** Zween gleiche Cubi lassen sich in einen verwandeln, der den beeden gegebenen vollkommen gleich ist. Ein Cubus oder Würfel läßt sich verdoppeln, oder in einen andern Cubus verwandeln, der gerade noch einmal so groß ist, als der gegebene. Denn es sey des gegebenen Cubi Seite $= a$, so ist sein Inhalt a^3, die Seite des gesuchten $= x$, so ist sein Inhalt $= x^3$, folglich nach der Bedingung $x^3 = 2a^3$, und $x = \sqrt[3]{2a^3}$ $= a\sqrt[3]{2}$; wenn man nun zwischen a und 2a zwo mittlere continuirlich geometrische Proportionalzahlen suchet, so wird die erste davon die gesuchte Seite seyn. Es seyen die zwey mittlere Proportionalzahlen x, y, daß die Progreßion heisse a, x, y, 2a; so ist

nr. I. $a : x = x : y$

folgl. $ay = x^2$

$y = \frac{x^2}{a}$ und quadrirt

$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$

nr. II. $x : y = y : 2a$.

$2ax = y^2$

$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$ es ist aber auch nach nr. II.

$y^2 = 2ax$ folglich

$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$

$\cdot a^2$

$x^4 = 2a^3x$

$: x$

$x^3 = 2a^3$

$\sqrt[3]{}$ extr.

$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$. Da nun x die Seite des doppelten Cubus ist, so ist es auch die erste von zwo mittleren Proportionalgrösen zwischen a und 2a; daher man durch diese Methode die Seite des doppelt so grosen Cubus finden kann.

§. 632. Anm. Diß ist das sogenannte Delphische Problem, welches unter den Alten eine sehr berühmte Aufgabe war. Der heydnische Apollo wurde um Abwendung der Pest von den Athenienern angerufen. Er versprach zu helfen, woferne man seinen Altar zu Delphi, der ein völliger Cubus war, verdoppeln, oder einen neuen Altar machen würde, der gerade noch einmal so groß, und doch wie der vorige, abermal ein vollkommener Cubus wäre. Dieses Problem gab nun Griechenland allen seinen Weisen auf, vermuthlich steckten es die Geometern selbst hinter die delphische Priester, damit der Ausspruch des Apollo desto eher alle Gelehrten in der griechischen Welt dazu aufmuntern möchte. Man wollte die Sache mit einer geometrischen Zuverläßigkeit und nicht mechanisch ausmachen; da es aber den meisten zu schwer fiel, so blieb das Problem lange Zeit unaufgelößt. Eratosthenes, Bibliothecarius zu Alexandrien, und der bekannte Hippocrates, von dem wir ein quadrirtes mondförmiges Cirkelstück, Lunulam Hippocratis, haben, fielen zuerst darauf, daß das Problem von der Erfindung zwoer mittleren Proportionallinien zwischen zwo gegebenen Linien abhange; wie unser oben gegebener Beweis lehret. Der Beweis ist zwar mehr arithmetisch als geometrisch; denn der Lehrsatz in Worten heißt folgender massen: Wenn man die Seite des gegebenen Cubus mit der Cubicwurzel aus 2 multiplicirt, so hat man die Seite des Cubus, der noch einmal so

groß

groß ist. Weil aber dieses Product die erste von zwo mittlern Proportionallinien zwischen a und 2a ist, wie wir gezeigt, so läßt sich der Beweis auch geometrisch vortragen.

Die Ausmessung der Cörper.

§. 633. **Erkl.** Ein Cörper wird ausgemessen, wenn man, wie in dem Flächenmaas eine Fläche, also hier im Cörpermaas einen Cörper zur Einheit macht, und suchet, wie oft dieser zur Einheit gemachte Cörper in dem andern enthalten sey. z. E. *Fig.* 80. α; da die Frage ist, wie oft der kleine Cörper AMNLK im grosen ADFEBG enthalten sey, oder herumgelegt werden könne.

§. 634. **Zusatz.** Der Cörper AMNLK wird zur Einheit angenommen; und weil die vollkommene Quadrate im Flächenmaas die dienlichste Einheiten sind, so hat man auch im Cörpermaas, vollkommene Cubos oder Würfel zur Einheit als die dienlichste angenommen, wie wir sogleich zeigen werden.

§. 635. **Zusatz.** Wenn ein senkrechtes Parallelepipedum 6 Schuh lang, 4 Schuh breit, und 2 Schuh hoch ist, und wenn *Fig.* 80. der Cubus AMNLK einen Schuh lang, breit und hoch ist, so kann man ihn im grösern 4.2.4 = 48 mal herum legen. Also ist der Inhalt des grosen Parallelepipedi = 48. AMNLK.

§. 636. **Zusatz.** Ist also AMNLK = 1. so ist der Inhalt = 48. Wo man allemal die Einheit hinzu denken muß.

§. 637. **Zusatz.** Man kann also nicht überhaupt sagen, wenn man genau redet, der Inhalt eines Parallelepipedi seye das Product seiner drey

Sei-

Seiten; dann eigentlich zu reden, gibt eine Linie, sie mag so oft multiplicirt werden als sie will, eben wieder eine Linie; wenn aber dieses Product in einen Cörper multiplicirt wird, so gibt es einen Cörper: und wenn der Cörper = 1, so ist das Product der Linien, weil 1 nicht multiplicirt, durch den im Sinn hinzugedachten Factor der Einheit der gesuchte Cörper.

§. 638. **Zusatz.** Weil im Längenmaas ein Schuh 10″ hält, so hält ein Cubicschuh, der 10″ lang, breit und hoch ist, 10 . 10 . 10 Cubiczoll; und ein Cubiczoll 10 . 10 . 10 Cubiclinien; daher im Cubicmaas die Linien, Zolle, Schuhe von 1000 zu 1000 gehen; das ist, 1000 Cubiclinien geben einen Cubiczoll, 1000 Cubiczolle einen Cubicschuh, 1000 Cubicschuh eine Cubicruthe; und folglich sind 34 560 327 854‴ im Cubicmaas 34′ 560′ 327″ 854‴.

§. 639. **Zusatz.** In dem Ganzen verschlägt es übrigens nichts, (wofern nur das angenommene Maas = 1 gesetzt wird) wenn man sagt, ein Cubus sey das dreyfache Product einer Seite, und ein senkrechtes Parallelepipedum das Product aller 3 Seiten; die Seite des Cubi sey drey, so ist sein Inhalt 3 . 3 . 3 = 27. oder a, so ist sein Inhalt a^3; die drey Seiten eines Parallelepipedi, 2, 4, 5, oder a, b, c, so ist der Inhalt 2 . 4 . 5 = 40, oder abc; aber alles unter der oben gesetzten Bedingung.

§. 640. **Zusatz.** Weil ein jedes schiefes Parallelogramm in ein senkrechtes verwandelt werden kann, §. 620. so läßt sich ein jedes schiefes Parallelogramm ausmessen, es ist nemlich das Product aus der Grundfläche in die Höhe.

§. 641.

§. 641. **Zusatz.** Und weil ein dreyeckigtes Prißma die Hälfte eines Parallelepipedi von einerley Grundfläche und Höhe ist, so läßt sich auch dieses ausmessen; es ist nemlich abermal das Product aus der Grundfläche, nemlich dem ausgemessenen Dreyeck in die Höhe des Prißmatis. Eben so sind vieleckigte Prißmata, folglich auch das Unendlicheck, oder der Cylinder dem Product aus den Grundflächen in die Höhe gleich.

§. 642. **Zusatz.** Und weil die Pyramid der dritte Theil des Prißmatis von gleicher Höhe ist, so ist der Inhalt der Pyramide dem Product der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe gleich.

§. 643. **Zusatz.** Eben so ist der Inhalt des Kegels das Product aus der circularen Grundfläche in den dritten Theil der Höhe, weil der Conus der dritte Theil vom Cylinder ist, der einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat.

§. 644. **Zusatz.** Der abgekürzte Kegel wird ausgemessen, wenn man den abgeschnittenen Theil des Kegels aus den beeden Circularflächen, und aus der gegebenen Höhe des abgekürzten Kegels sucht, und hernach den kleinen Kegel von dem Ganzen subtrahirt. Denn es seyen *Fig.* 75. die beeden Radii DE und AC gegeben, so weiß man auch ihre Differenz AB; es sey ferner die Höhe des abgekürzten Kegels BD oder CE gegeben, so findet man die Höhe CF des ganzen Kegels, weil AB : BD = AC : CF, und auch die Höhe des kleinen Kegels FE = CF — EC, und daraus die ganze Kegel, und ihre Differenz, den abgekürzten Kegel.

§. 645.

§. 645. **Zusatz.** Wenn man die Oberfläche der Kugel weiß, so findet man auch ihren Inhalt, welcher nach §. 630. dem Product aus der Oberfläche in den dritten Theil des Radius, oder in den sechsten Theil des Diameters gleich seyn wird. Wie man aber die Kugelfläche finde, werden wir sogleich zeigen, weil wir von der Kugel besonders handeln.

§. 646. **Zusatz.** Irreguläre Cörper werden durch allerhand Kunstgriffe, z. E. durch Einlegen in ein mit Wasser gefülltes vollkommenes Parallelepipedum u. s. w. auf die Regularität reducirt, wie *Fig.* 82. diß aber gehört in die practische Geometrie.

Die Kugel oder Sphäre.

§. 647. **Erklär.** Was eine Kugel sey und wie sie entstehe, haben wir §. 612. gesagt. Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geschnitten wird, so entstehen aus den Schnitten Cirkel; welche immer gröser werden, je näher die Schnitte dem Mittelpunkt der Kugel kommen, bis sie im Mittelpunkt die gröste werden; dahero die **gröste Cirkel** einer Kugel (Circuli maximi) diejenige sind, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, und deren Peripherie sich an der Kugelfläche endigt. Alle andere Cirkel sind kleiner.

§. 648. **Lehrsatz.** Die Kugel ist zween Dritheilen von dem Cylinder gleich, der einerley Höhe und Diameter mit der Kugel hat. Denn man stelle sich vor *Fig.* 76. das Quadrat DCBA bewege sich um AD als eine Axe herum, so entsteht ein Cylinder. Zu

glei=

gleicher Zeit sollen sich das gleichschenklichte Dreyeck DCA auch um DA, und der Quadrant DGB ebenfalls um DA als um eine Axe herum bewegen, so wird im ersten Fall ein Conus, im andern eine halbe Kugel durch diese Bewegung entstehen. Die Summe aller Durchschnitte oder Scheiben vom Cylinder wird den Cylinder, die Summe aller Durchschnitte oder Scheiben vom Conus den Conus, und die Summe aller Durchschnitte von der Kugel die Kugel geben. Wenn man nun *Fig.* 76. einen beliebigen Durchschnitt EH, der dem Cylinder, dem Conus, und der Kugel gemeinschaftlich ist, und hernach in dem Durchschnittspunkt der Kugel G aus A den Radius AG ziehet, so wird der Beweis des vorgetragenen Lehrsatzes nicht schwer seyn.

Satz. *Fig.* 76.

Sphär. $= \frac{2}{3}$ Cyl.

Bew.

$AG^2 = AE^2 + EG^2$ §. 503.

$AG^2 = EH^2$ weil $AG = AB = EH$ nach der Voraussetzung.

$EH^2 = AE^2 + EG^2$

$AE^2 = EF^2$ weil $AD : DC = AE : EF$

folglich substituirt

$AD : DC = 1 : 1$ ist ein Quadrant

$AE : EF = 1 : 1$ d. i.

$AE = EF$

$EH^2 = EF^2 + EG^2$

$EF^2 = EF^2$ subtr.

$EH^2 - EF^2 = EG^2$ folglich

$\text{Sum.}\, EH^2 - \text{Sum.}\, EF^2 = \text{Sum.}\, EG^2$ das ist, weil sich die Quadrate der

der Diam. wie die Circulflächen verhalten,

Cyl. — Con. = Sphär. es ist aber
Cyl. — Con. = Cyl. — $\frac{1}{3}$Cyl. = $\frac{2}{3}$Cyl. dahero

$\frac{2}{3}$Cyl. = Sphär.

§. 649. **Zusatz.** Ein Cylinder, Kugel und Kegel von gleichen Höhen verhält sich also wie 1, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$, das ist, wie 3, 2, 1.

§. 650. **Anm.** Dieses ist eine Erfindung des Archimedes, welcher so verliebt darein war, daß er sie auf sein Grabmaal zu stechen befohlen haben solle. Sie ist auch in der That ein Beweis von einer nicht geringen Scharfsinnigkeit, wodurch sich dieser grose Geometra verewigt hat.

§. 651. **Lehrsatz.** Die Oberfläche der Kugel ist vier größten Cirkeln (circulis maximis,) gleich.

Satz.

4 Circ. max. = Superfic. Sphær.

Beweis.

Circ. max. ⋈ Diam. = Cylindr.

. $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ Circ. max. ⋈ Diam. = $\frac{2}{3}$ Cyl.
Sphær. = $\frac{2}{3}$ Cyl.

$\frac{2}{3}$ Circ. max. ⋈ Diam. = Sphær.
$\frac{1}{6}$ Diam. ⋈ Superf. Sphær. = Sphær. nach §. 640.

$\frac{2}{3}$Circ. max. ⋈ Diam. = $\frac{1}{6}$Diam. ⋈ Superf. Sphær.

. 6

$\frac{12}{3}$Circ. max. ⋈ Diam. = Diam. ⋈ Superf. Sphær.

: Diam.

$\frac{12}{3}$Circ. max. = Superf. Sphær. das ist
4 Circ. maximi = Superfic. Sphær.

§. 652.

§. 652. **Zusatz.** Da nun der grösste Cirkel gefunden wird, wenn man seine Peripherie mit dem vierten Theil des Cirkels multiplicirt, so ist die ganze Oberfläche der Kugel das Product aus der Peripherie des grösten Cirkels in den Diameter; dann dieses Product ist vier Circulis maximis gleich.

§. 653. **Zus.** Wenn man dieses Product nochmal mit dem sechsten Theil des Diameters multiplicirt, so hat man den Inhalt der Kugel.

§. 654. **Zusatz.** Wenn man die Verhältniß des Diameters wie oben $1 : \pi$ setzt, so ist der Inhalt einer Kugel, deren Diameter $d = \frac{\pi d^3}{6}$; denn πd ist die Peripherie, weil $1 : \pi = d : \pi d$; dieses mit dem Diameter multiplicirt, gibt die Oberfläche der Kugel $= \pi d^2$ nach §. 652. und dieses Product nochmalen mit dem sechsten Theil des Diameters $= \frac{d}{6}$ multiplicirt, gibt $\frac{\pi d^3}{6}$, und wenn die Kugel S heisset, so ist $\frac{\sqrt[3]{6 . S}}{\pi} = d$.

§. 655. **Zusatz.** Wenn eine andere Kugel zum Diameter D hat, so ist ihr Inhalt aus gleichem Grunde $= \frac{\pi D^3}{6}$, folglich verhalten sich zwey Kugeln A und B wie die Cubi der Diameter. Denn es sey $\frac{\pi D^3}{6} = A$, und $\frac{\pi d^3}{6} = B$;

so ist $A : B = \frac{\pi D^3}{6} : \frac{\pi d^3}{6}$

$$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} : \frac{\pi}{6}$$

$A : B = D^3 : d^3$.

§. 656. **Zusatz.** Wenn die Ludolphische Verhältniß des Diameters zur Peripherie wie 100:314 angenommen wird, so ist die Verhältniß des Cubi vom Diameter zur Sphäre, wie 300:157, welches nach der obigen Formel in Zahlen leicht zu berechnen ist.

§. 657. **Anm.** Kugeln lassen sich in Cylinder, Kegel u. s. w. verwandeln; wenn nur etwas, z. E. die Höhe von dem Cörper gegeben wird, worein sie sich verwandeln sollen. z. E. eine Kugel soll in einen Cylinder, dessen Höhe $= a$, verwandelt werden, man sucht den Diameter des Cylinders; so ist nach §. 652. wenn der Diameter $= x$ gesetzt wird,

$$\frac{d^3p}{6} = \frac{apx^2}{4}$$

$$\frac{\qquad\qquad}{} : \frac{ap}{4}$$

$$\frac{4d^3}{6a} = x^2 \text{ oder } \frac{2d^3}{3a} = x^2, \text{ dahero}$$

$$3a : 2d = d^2 : x^2.$$

Eben so läßt sich ein Kegel in eine Kugel verwandeln; man sucht den Diameter der Kugel, den wir x nennen; so ist der Inhalt des Kegels, wenn seine Höhe a gesetzt ist, $= \frac{adp}{12}$ und der Kugel $\frac{px^3}{6}$, dahero

$$\frac{px^3}{6} = \frac{ad^2p}{12}$$

$$\frac{\qquad\qquad}{} : \frac{p}{6},$$

$$x^3 = \frac{6}{12}ad^2 = \frac{1}{2}ad^2$$

$$\frac{\qquad\qquad}{} : \sqrt[3]{\ }$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}ad^2}.$$

Man siehet leicht, daß sich noch verschiedene Veränderungen dieser Art durch Hülfe der Buchstabenrechnung geben lassen; wir begnügen uns dahero, nur einige gezeigt zu haben.

Die

Die Kugelschnitte.

§. 658. Erklär. Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geschnitten wird, so heißt der Schnitt ein **Kugelschnitt**, welcher allemal ein Cirkel ist.

§. 659. Anm. Zum Ueberfluß kann man diese Folge, daß der Schnitt ein Cirkel sey, auch beweisen. Denn es sey *Fig.* 78. in C der Mittelpunkt der Kugel, der Schnitt sey BEFG; man fälle aus C den Perpendikel CH auf die flache Ebene des Schnittes, und ziehe die Radios CE, CF, und vereinige die Punkten E und H, wie auch F und H durch die Linien EH, FH, so ist

nr. I. $CF^2 = EH^2 + CH^2$

$CE^2 - CH^2 = EH^2$

nach nr. II $CE^2 - CH^2 = FH^2$

folglich $EH^2 = FH^2$

nr. II. $CF^2 = FH^2 + CH^2$

$CF^2 - CH^2 = FH^2$

$CF^2 = CE^2$ sind Radii

$CE^2 - CH^2 = FH^2$

$EH = FH$ dahero BEF ein Cirkel.

§. 660. Zusatz. Wenn $EH = 0$, so ist der Cirkel ein größter.

§. 661. Zusatz. Weil alle größte Cirkel einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt mit der Kugel haben, so halbiren sie alle einander. Und folglich sind Cirkel, die einander halbiren oder in zween gleiche Theile theilen, allemal größte Cirkel.

§. 662. Erklär. Zween einander so entgegengesetzte Punkte der Kugel, daß eine gerade Linie von einem zum andern durch den Mittelpunkt der Kugel geht, oder ihr Diameter ist, heissen die **Pole** der Kugel, und in Rucksicht auf den Cirkel, durch dessen Mittelpunkt sie gehen, und auf dessen Fläche sie perpendicular stehen, Pole des Cirkels.

§. 663. Zusatz. Sie sind also von allen Punkten eines gegebenen Parallel-Cirkels gleich weit entfernt.

§. 664. **Zusatz.** Eine Kugel auf eine ebene Fläche gelegt, berührt sie nur in einem unendlich kleinen Theil, und die Ebene ist für die Kugel was die Tangente für den Cirkel ist.

§. 665. **Zusatz.** Parallel-Cirkel, wie *Fig.* 77. die Cirkel MN, KL, haben einerley Pole, nemlich P und Q.

§. 666. **Zusatz.** Zween größte Cirkel, deren ein jeder durch den Pol des andern geht, stehen auf einander senkrecht. Nach der Erklärung §. 662.

§. 667. **Lehrsatz.** Wenn ein größter Cirkel durch den Pol des andern gehet, so ist der Bogen zwischen dem Pol und dem Cirkel ein Quadrant; und wenn zween größte Kreise auf einander perpendicular stehen, so geht ein jeder durch den Pol des andern. Denn es sey *Fig.* 77. KDEL ein größter Cirkel; durch seine Pole P und Q gehe ein anderer größter Cirkel PGDQ, so werden sie beede einander im Mittelpunkt der Kugel schneiden, und durch den gemeinschaftlichen Diameter halbiren; folglich ist PC = CQ, und eben so PC = DC; und PCD der Winkel, den der größte Cirkel KDEL mit dem andern durch seinen Pol gehenden größten Cirkel PGDQ macht; da nun dieser ein rechter ist oder 90° hält, §. 662. so muß der Bogen PD, das Maas des rechten Winkels PCD ein Quadrant seyn. Denn daß er das Maas des rechten Winkels ist, erhellet daher, daß PC = CD, folglich wird mit dem Radio CD = PC aus dem Mittelpunkt C der Bogen PE gezogen, welcher das Maas des Winkels ist. Eben so, wenn PD = 90°,

so

so ist der Winkel PCD, dessen Maas PD ist, auch 90° oder ein rechter.

§. 668. **Zusatz.** Wenn auf gleiche Weise durch eben diese Pole ein anderer grösster Cirkel gezogen wird, wie PHEQ, so ist auch PE ein Quadrant, und der Winkel PCE = 90°. Dahero bey D und E rechte Winkel sind. Eben das gilt, wenn mehrere solche Cirkel durch P und Q gezogen werden.

§. 669. **Zusatz.** Weil DC auf CP, und EC auf CP perpendicular ist, so ist der Winkel ECD der Neigungswinkel der beeden Cirkelflächen PGDQ und PHEQ.

§. 670. **Zusatz.** Wenn AQ die Tangente von PDQ, und BQ die Tangente von PEQ ist, so ist der Winkel AQB dem Neigungswinkel DCE gleich.

§. 671. **Zusatz.** In einem jeden Parallelkreise mit KDL, ist der Neigungswinkel GFH dem Neigungswinkel DCE gleich, folglich sind die Bogen GH, DE ähnlich; und haben eine gleiche Anzahl Grade; denn sie sind beede das Maas der gemeldten Winkel.

§. 672. **Erklär.** Ein Winkel, den zween grösste Cirkel mit einander machen, heißt ein **sphärischer Winkel**; z. E. der Winkel PDE; daher er auch durch Bogen von grösten Cirkeln gemessen wird; und ein sphärisches Dreyeck heißt ein Dreyeck, das aus drey sphärischen Winkeln, und folglich auch drey Bogen von grösten Kreisen bestehet.

§. 673. **Zusatz.** Weil zween Bogen grösster Cirkel, die aus einem Punkt, z. E. dem Pol kommen,

auf einen dritten größten Cirkel einen Bogen abschneiden können, so sieht man schon, daß ein sphärisches Dreyeck mehr als zween rechte Winkel haben könne; wie *Fig.* 77. das Dreyeck PDE.

§. 674. **Zusatz.** Wenn PE von PD um 90 Grad entfernt wäre, so hätte das Dreyeck drey rechte Winkel. Vier kann es nicht haben, wie unten in der sphärischen Trigonometrie gezeigt wird.

§. 675. **Anm.** Die sphärische Trigonometrie wird besonders abgehandelt werden; dahero das weitere von den sphärischen Dreyecken in der besondern Abhandlung davon vorgetragen werden soll. In dem bisherigen haben wir die Elementargeometrie so vollständig vorzutragen gesucht, als man sie irgendwo in den neuesten Schriften finden wird.

Zwey-

Zweytes Hauptstück,

Von der Trigonometrie.

§. 676.

Erklärung.

Die Trigonometrie lehret, wie aus drey gegenen Stücken eines Dreyecks, worunter bey ebenen Dreyecken wenigstens eine Seite seyn muß, weil sonst die Winkel allein unendlich vielen Dreyecken gemein seyn könnten, die übrige Drey finden solle; man gibt einem nemlich die drey Stücke des Dreyecks in Zahlen, oder auch allgemein, in Buchstaben, daraus man das gesuchte durch Rechnung findet.

§. 677. Anm. Die Trigonometrie gehört dahero theils zur Geometrie, theils zur Arithmetik, und wird wegen ihrem ungemeinen Nutzen in der angewandten Mathematik als eine besondere Wissenschaft abgehandelt, auch die ebene von der sphärischen getrennt, weil jene in allen mathematischen, diese aber nur in den astronomischen und damit verbundenen Wissenschaften ihren Nutzen hat. Wir werden dahero, wenn wir die Geschichte vorgetragen haben, in zweyen Capiteln von der ebenen sowohl als von der sphärischen Trigonometrie handeln.

Geschichte der Trigonometrie.

§. 678. Wie die menschliche Bedürfnisse den bisher vorgetragenen Wissenschaften ihren Ursprung

gaben, so hat auch die Trigonometrie ihr erstes Daseyn denselben zu danken. Die Bestimmung der Zeiten konnte ohne Kenntniß des Himmels nicht in Richtigkeit gebracht werden; die Erscheinungen aber am Himmel genau zu bestimmen, hatte man besonders die Trigonometrie nöthig. Dahero schon die Alten sich dißfalls viele Mühe gegeben, und die Trigonometrie meistens ihren astronomischen Werken vorgesetzt haben.

§ 679. Der erste, von dem man weiß, daß er was trigonometrisches geschrieben habe, dessen Arbeit aber verlohren gegangen, war **Hipparchus**, der zwölf Bücher de Triangulis verfertigte. Claud. **Ptolemäus**, der etlich hundert Jahre später gelebt, im zweyten Jahrhundert unserer Zeitrechnung, machte im ersten Buch seines Almagesti einen Auszug daraus, den wir noch haben; von dieser Zeit an war man mit den Hipparchischen Erfindungen zufrieden, bis vor ungefähr 300 Jahren Joh. **Regiomontanus**, oder Joh. **Müller** von Königshofen in Franken, ein Nürnbergischer Astronom, die Trigonometrie in einem besondern Werk de Triangulis gemeinnütziger machte. Er hat die Tabulas sinuum, wie wir sie noch haben, berechnet, wiewohl er anfänglich den Radius oder Sinus totus nicht in 10 Millionen, sondern in 60 tausend Theile getheilet hat. Diese Arbeit aber blieb im Rechnen noch immer sehr mühsam, bis vollends die logarithmische Erfindungen hinzu kamen, welche man insgemein dem Joh. **Neper**, Baron von Merchiston, einem Schottländer, zuschreibt, der sie 1614 zu Edinburg in seinem herausgegebenen Canone mirifico Logarithmo-

rithmorum zuerst bekannt gemacht haben solle; wiewohlen andere einen Teutschen, den Jost Byrge zum Erfinder machen.

§. 680. Anmerk. Von diesem Jost Byrge kann man nicht gewiß sagen, ob er ein Schweitzer oder ein Hesse von Geburt war, wohl aber, daß er sich in Hessen-Cassel lange Zeit aufgehalten habe, wie ich in meinen Amœnit. Acad. vom Jahr 1754. Fasc. I. unter dem Titel: Memorabilia Germaniæ literatæ gezeigt habe; Er war in mathematischen und besonders astronomischen Wissenschaften wohl bewandert, welches Zeugniß ihm Kepplер gibt; wiewohl er ihn einen zaudernden Menschen nennt, der seine Geheimnisse, besonders die Logarithme, verborgen hielte, und nicht wollte auskommen lassen. Die Stelle des Kepplers stehet in seinen Tabulis Rudolphinis c. 3. p. 11. wo er diesen Jost Byrge eben in Rucksicht auf seine logarithmische Erfindung einen Hominem Cunctatorem & Secretorum suorum custodem, qui fœtum in partu destituit & non ad usus publicos educavit, ausdrücklich nennet. Mich dünket, dieses Zeugniß könne doch etwas gelten, und beweise wenigstens so viel, daß Byrge vor dem Neper schon diese Kunst gewußt, wenn sie gleich Neper hernach von sich selbst und nicht von dem geheimnißvollen Byrge gelernet hat.

§. 681. Neper hat die Logarithmen nur auf die Minuten gerechnet, und den Sinum totum = o gesetzt, daß die Logarithmi negativ werden, wenn die Sinus wachsen. Weil aber diß unbequem schien, so hat Heinr. Brigg, Prof. zu Oxfort, auf Gutbefinden des Joh. Nepers, im Jahr 1624 in seiner herausgegebenen Arithmetica logarithmica den Sinum totum = 1 und dessen Logarithmus = o, angenommen, und nach denselben berechnet. Benjamin Ursinus hat in dem seiner Trigonom. angehängten Canone logarithmorum sie noch weiter von 10 zu 10 Secunden berechnet. Adrian Vlacq hat 1628 die Logarithme von 20000 bis 90000 vollends hinzugethan, auch die Logarithmos Sinuum und Tangentium nach dieser Art berechnet, und zwar zum Unglück für ihn, gerade um hundert Jahr früher,

her, als die neuere Entdeckungen gemacht wurden, durch deren Hülfe man alles diß mit ungleich ringerer Mühe hätte berechnen können. Denn seit fünfzig Jahren hat man durch die Rechnung des Unendlichen solche Kunstgriffe erfunden, welche das sonst so beschwerliche Rechnen, dem sich **Neper**, **Brigg** und **Vlacq** unterzogen haben, ungemein erleichtern. Die Vlacquische Tabellen hält man für die correcteste, doch kann man auch die Wolfische gebrauchen.

§. 682. Anm. Was man bis zu Anfang gegenwärtigen Jahrhunderts in der Trigonometrie wußte, hat der Freyherr v. Wolf in seine mathematische Schriften eingetragen. Darinn aber schien er was eigenes zu haben, das eben nicht so gar löblich ist, daß er von allen neuen Entdeckungen, die seit dieser Zeit gemacht wurden, bey den neuen Auflagen seiner Schriften das mindeste nicht eingeschalten, und dahero nach dem Zeugniß aller Kenner, die Trigonometrie, deren wichtigen Einfluß in andere Wissenschaften er doch überall rühmet, nichts desto weniger so unvollständig und abgekürzt vorgetragen hat, daß man um selbige zu ergänzen, entweder Zusätze in den Collegiis dictiren, oder ein anderes Handbuch zum Lesen zu Grunde legen muß; wir werden uns dahero bemühen, diesen Abgang hier zu ersetzen, und aus den neuesten Schriften dieser Art dasjenige hinzuzuthun, was zur Vollständigkeit dieser ungemein fruchtbaren Wissenschaft auf irgend eine Weise sich hinzusagen läßt.

Erstes Capitel,
Von der ebenen Trigonometrie.

§. 683.
Erklärung.

Die ebene Trigonometrie (Trigonometria plana) lehret aus drey gegebenen Stücken eines ebenen

nen Dreyecks, unter welchen wenigstens eine Seite seyn muß, die übrige drey Stücke durch Rechnung zu finden.

§. 684. **Zusatz.** Eine Seite muß deßwegen gegeben seyn, weil drey Winkel unendlich viel ähnliche Dreyecke bestimmen, und folglich die Seiten der Dreyecke in der ebenen Trigonometrie aus drey gegebenen Winkeln anders nicht als unbestimmt gefunden werden; man will aber die Seiten bestimmt wissen. Wie dißfalls die sphärische Trigonometrie von der ebenen unterschieden seye, werden wir unten zeigen.

Allgemeine Begriffe vom Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten.

§. 685. **Erklär.** Eine Perpendicularlinie, welche von dem Endpunkt eines Radii auf einen andern Radius herabgefället wird, heißt der **Sinus** des Bogens, der zwischen den beeden Radiis enthalten ist. *Fig.* 84. ist also DE der Sinus des Bogens DA.

§. 686. **Zusatz.** Weil der Bogen DA das Maas des Winkels DCA ist, so ist DE auch der Sinus dieses Winkels.

§. 687. **Zusatz.** Wenn der Sinus in gerader Linie verlängert wird, bis er den Cirkel wieder schneidet, so entstehet eine **Sehne** (Chorda) DF, von welcher der Sinus die Hälfte ist; das ist DE $= \frac{1}{2}$DF.

§. 688.

§. 688. Zusatz. Weil von dem Endpunkt des Radius DC auf den Radius CB keine andere Perpendicularlinie gefällt werden kann, als diejenige, die auf den ruckwarts nach A verlängerten Radius sich fällen läßt, nemlich wieder DE, so ist der vorige Sinus der Sinus von beeden Bogen, die zusammen einen halben Cirkel oder 180° machen.

§. 689. Zus. Zween Nebenwinkel haben also einerley Sinus; so ist z. E. der Sinus von 30° auch der Sinus von 150°, das ist, der Sinus des spitzigen Winkels ist auch der Sinus seines stumpfen Nebenwinkels.

§. 690. Zus. Die Sinus wachsen von A oder o grad bis auf 90° oder H, wo im ersten Quadranten HC der grösste Sinus wird; von dannen nehmen sie wieder ab bis B oder 180°, wo der Sinus abermal null wird; von B bis L, also 180 + 90 = 270° nehmen sie aber auf den entgegengesetzten Seiten des Diameters AB wieder zu, und von L bis A oder 360° nochmalen auf dieser Seiten wieder ab; und wenn man die Peripherie verdoppelt, so nehmen sie von 360 oder A bis H, als 360 + 90 = 450° wieder auf der ersten Seite zu, und von H oder 450° bis B oder 450 + 90° = 540° auf eben der Seite wieder ab u. s. w. wie oben; denn man kann die Peripherie so vielmal nehmen als man will.

§. 691. Zus. Der grösste Sinus, wie CH, ist dem Radius gleich.

§. 692. Erklär. Der grösste Sinus, das ist der Radius, heißt in der Trigonometrie der Sinus totus.

§. 693.

§. 693. **Zusatz.** Weil kein Sinus gröser wird als der Sinus totus, so kann man die Sinus als eigentliche Brüche vom Sinus totus oder Radius ansehen.

§. 694. **Erklär.** **Positiv** heißt bey einer Figur was gegen die eine, **negativ** was gegen die andere Seite zu lieget; oder umgekehrt, so daß beede Grösen gerade entgegen gesetzt sind. Oder auch nach den arithmetischen Gründen: das negative entsteht aus dem Uebergang durch das Nichts oder die Nulle.

§. 695. **Zusatz.** Die Sinus von 0 bis 180° sind also positiv, und die von 180 bis 360° sind negativ; nach §. 690. und diese Verhältniß bleibt auch bey Vervielfältigung der Peripherie. Oder wenn man die vier Quadranten eines Cirkels betrachtet, so sind die Sinus in den zween ersten positiv, in den zween letztern negativ, bey der Verdoppelung abermal im fünften und sechsten positiv, im siebenden und achten negativ u. s. w.

§. 696. **Zusatz.** DE ist also der Sinus vom Bogen DA, und vom Bogen DB, ferner von dem Bogen DBd aber negativ, und vom Bogen DBdA aber auch negativ; weiter vom Bogen ADBdAD aber wieder positiv, u. s. w. ins unendliche.

§. 697. **Zus.** Ein einiger Sinus ist also der Sinus von unendlich vielen Bögen; dahero keine bestimmte Verhältniß zwischen dem Bogen und seinem Sinus sich geben läßt.

§. 698. **Anm.** Daß es ausser dem Sinus totus nur einen einigen Sinus gebe, nemlich den Sinus von 60°, der genau und ohne die Approximation berechnet werden kann, werden wir unten zeigen.

§. 699. **Erklär.** Wenn ein Bogen unter $90°$ gegeben ist, so heißt die Anzahl Grade, oder der Bogen, der zu ihm addirt, 90 Grade vollends gibt, das Complementum (Ergänzung) zu $90°$, und der Sinus dieses Bogens der Sinus Complementi oder **Cosinus**. *Fig.* 84. ist DH das Complementum von AD, denn $AD + DH = 90°$; der Sinus von DH ist DK, nun ist $DK = EC$; folglich EC Sinus DH, oder Sinus Complementi oder Cosinus.

§. 700. **Lehrsatz.** Aus dem gegebenen Radius und Sinus eines Bogens läßt sich der Cosinus finden: Er ist nemlich allemal die Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate des Radii und des Sinus.

Satz. *Fig.* 84.

$$EC = \surd(CD^2 - ED^2)$$

Bew.

$CD^2 = ED^2 + EC^2$ nach dem Pythag. Lehrsatz.

$ED^2 = ED^2$

subtr.

$CD^2 - ED^2 = EC^2$

$\surd$ extrahirt

$\surd CD^2 - ED^2 = EC.$

§. 701. **Zusatz.** Wenn der Radius $= 1$, und der Sinus $= s$, so ist Cos. $= \surd 1 - s^2$.

§. 702. **Zus.** Wenn der Cosinus nebst dem Radius gegeben, so ist der Sinus auch gegeben, denn wenn der Cos. σ, so ist $s = \surd 1 - \sigma^2$.

§. 703. **Zusatz.** Die Cosinus nehmen ab, wenn die Sinus wachsen, hingegen wachsen sie, wenn

die

die Sinus abnehmen. Denn *Fig.* 84. je gröser ED wird, desto kleiner wird EC, und umgekehrt.

§. 704. **Zusatz.** Wenn der Sinus dem Radius gleich wird, in CH, so fällt der Cosinus in den Mittelpunkt C und verschwindet, oder wird = 0, folglich sind die Cosinus der Bogen über 90° negativ bis auf 180°, wo der Sinus = 0, der Cos. aber = CB = — AC = Rad. und dahero ein gröβtes wird; dann nimmt er wieder ab bis auf 180 + 90 = 270°, wo er zum zweytenmal = 0 wird; von da an wird er wieder positiv, und nimmt zu bis 360, wo er = AC, und von da an bis H, oder bis 360 + 90 = 450° wieder abnimmt und 0 wird u. s. w.

§. 705. **Zusatz.** Die Cosinus vom ersten und vierten Quadranten sind also positiv, die von den zwey mittlern, nemlich zweyten und dritten, sind negativ. u. s. w.

§. 706. **Zusatz.** Ein jeder Cosinus gehöret, wie der Sinus, unendlich vielen Bogen zu.

§. 707. **Erklär.** Eine gerade Linie, die den Cirkel in dem Punkt wo der Bogen anfängt, unter einem rechten Winkel mit dem Radius berührt, und von dem andern verlängerten Radius geschnitten und folglich bestimmt wird, heißt die **Tangente** des Bogens, und der sie schneidende verlängerte Radius die **Secante.** So ist AG die Tangente und CG die Secante.

§. 708. **Lehrsatz.** Aus dem Radius und Sinus ist der Cosinus, nach §. 700. und aus beeden die Tangente und Secante gegeben. Denn wenn der Radius = r, und der Winkel oder Bogen AD = Φ gesetzt wird, so ist

I. Satz. *Fig.* 84.

$$\text{tang. } \varphi = \frac{r \text{ . sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi}$$

Bew.

$\Delta ECD \backsim \Delta AGC$ folglich

$EC : ED = AC : AG$ das ist in Buchstaben:

$\text{cos. } \varphi : \text{sin. } \varphi = r : \frac{r \text{ . sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi}$ aber $AG = \text{tang.}$

$\frac{r \text{ . sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi} = \text{tang. } \varphi.$

II. Satz. *Fig.* 84.

$$\text{secant. } \varphi = \frac{r^2}{\text{cos. } \varphi}$$

Bew.

$\Delta ECD \backsim \Delta AGC$. folglich

$EC : CD = CA : CG$

$CD = CA$ sind Radii: substit.

$EC : CA = CA : CG$ in Buchstaben

$\text{cos. } \varphi : r = r : \frac{r^2}{\text{cos. } \varphi}$ $= CG$ aber $CG = \text{sec.}$

$\frac{r^2}{\text{cos. } \varphi} = \text{sec. } \varphi.$

§. 709. Zus. Nach dem Pythagorischen Lehrsatz ist $CG^2 = AG^2 + AC^2$, und $CG = \sqrt{AG^2 + AC^2}$, das ist in Buchstaben $\text{sec. } \varphi = \sqrt{(\text{tang. } \varphi)^2 + r^2}$, das ist, die Secante ist die Quadratwurzel aus der Summe des Quadrats der Tangente und des Quadrats des Radius, und man kann aus der Tangente die Secante finden.

§. 710.

§. 710. **Zusatz.** Auf gleiche Weise kann man aus der Tangente und dem Cosinus den Sinus u. s. w. oder überhaupt, wenn der Radius als bekannt angenommen wird, aus zwey Stücken, was man für will, das dritte finden; wenn man nur die ähnliche Dreyecke *Fig.* 84. betrachtet, und daraus das gesuchte herleitet.

§. 711. **Zusatz.** Wenn $\cos.\varphi = 0$, so ist

$$\frac{r.\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{r.\sin.\varphi}{0} = \infty \text{ und } \frac{r^2}{\cos.\varphi} = \frac{r^2}{0} = \infty;$$

folglich Tangente und Secante unendlich; da nun $\cos.\varphi$ zweymal in den 4 Quadranten unendlich wird, so wird auch die Tangente und Secante zweymal unendlich, und zwar eben da, wo der Cos. null wird. Eben diß erhellt aus der Figur, weil in beeden Fällen bey H und L die Tangenten und Secanten Parallellinien werden, die unendlich fortgehen, ohne einander zu schneiden.

§. 712. **Zusatz.** Wenn $\sin.\varphi = 0$, so ist die tang. auch $= 0$; wie aus dem Ausdruck sogleich erhellt; folglich wird die Tangente zweymal in den 4 Quadranten null, und zwar eben da, wo der Sinus null wird, die Secante aber wird in diesem Fall dem Radius gleich.

§. 713. **Zusatz.** Im ersten und dritten Quadranten sind also die Tangenten bejahend, im zweyten und vierten verneinend oder negativ.

§. 714. **Zusatz.** Eine jede Tangente und Secante correspondirt unendlich vielen Bögen.

§. 715. **Erklär.** Die Cotangente ist die Tangente des Complementi zu 90°, welche durch

die Secante dieses Bogens, die deßwegen Cosecante heißt, geschnitten und bestimmt wird.

§. 716. Lehrsatz. Durch den Sinus und Radius wird die Cotangente und Cosecante bestimmt. Denn es seyen die Buchstaben wie oben §. 708. so ist

I. Satz. *Fig.* 85.

$$\cot.\varphi = \frac{r^2}{\text{tang.}\varphi}$$

Bew.

weil AG, HC parallel; so ist der Wink. G = GCH. §. 456.
A = H sind rechte = 90°

ΔGAC ∽ ΔCHK. dahero
AG:AC = CH:HK
AC = CH sind Rad.

AG:AC = AC:HK das ist in Buchst.

$$\text{tang.}\varphi : r = r : \frac{r^2}{\text{tang.}\varphi} = HK = \cot.$$

II. Satz. *Fig.* 85.

$$\text{cosec.}\varphi = \frac{r^2}{\text{sin.}\varphi}$$

Bew.

G = GCH
A = H

ΔGAC ∽ ΔCHK

ΔGAC ∽ ΔDEC

ΔDEC ∽ CHK. folgl.
ED:CD = CH:CK
CD = CH sind rad.

ED:CD = CD:CK; in Buchst.

$$\text{sin.}\varphi : r = r : \frac{r^2}{\text{sin.}\varphi} = CK = \text{cosec.}$$

§. 717. Zusatz. Was von den Tangenten in Absicht auf ihre Zeichen nach den verschiedenen Quadranten und auf die unendlich viele Bogen, die ihnen correspondiren können, gesagt worden, gilt auch von den Cotangenten.

§. 718. Lehrsatz. Die Cotangenten verhalten sich umgekehrt wie die Tangenten. Denn es sey ein anderer Bogen = π, so ist nach §. 716. cot.

$$\pi = \frac{r^2}{\text{tang.}\pi}.$$

Satz.

Satz. *Fig.* 83.

$\cot.\pi : \cot.\varphi = \text{tang.}\varphi : \text{tang.}\pi.$

Bew.

$\cot.\pi : \frac{r^2}{\text{tang.}\pi} = \cot.\varphi : \frac{r^2}{\text{tang.}\varphi}$ denn beede Paar Glieder sind gleich.

versetzt

$\cot.\pi : \cot.\varphi = \frac{r^2}{\text{tang.}\pi} : \frac{r^2}{\text{tang.}\varphi}$

$\frac{\qquad\qquad}{} \cdot \text{tang.}\pi$

$= r^2 : \frac{\text{tang.}\pi . r^2}{\text{tang.}\varphi}$

$\frac{\qquad\qquad}{} \cdot \text{tang.}\varphi$

$= r^2 \text{ tang.}\varphi : \text{tang.}\pi . r^2$

$\cot.\pi : \cot.\varphi = r^2 \text{ tang.}\varphi : r^2 \text{ tang.}\pi$

$\frac{\qquad\qquad}{} : r^2$

$\cot.\pi : \cot.\varphi = \text{tang.}\varphi : \text{tang.}\pi.$

§. 719. Erklär. Der Abschnitt des Radii durch den Sinus, nemlich AE, heißt der Sinus versus; man kann ihn wie die andere Stücke, leicht finden.

§. 720. Anm. Der Lehrsatz §. 716. ist wohl zu merken, er hat sowohl hier als in der sphärischen Trigonometrie seinen Nutzen; übrigens können die bisherige Sätze kürzlich so gefaßt, und dem Gemüth eingedruckt werden. Es solle π einen halben Cirkel bedeuten, der Radius $= 1$; so wird

I.	II.	III.	IV.
$\sin.0\pi = 0$	$\cos.0\pi = 1$	$\text{tang.}0\pi = 0$	$\cot.0\pi = \infty$
$\sin.\frac{1}{2}\pi = 1$	$\cos.\frac{1}{2}\pi = 0$	$\text{tang.}\frac{1}{2}\pi = \infty$	$\cot.\frac{1}{2}\pi = 0$
$\sin.\pi = 0$	$\cos.\pi = -1$	$\text{tang.}\pi = 0$	$\cot.\pi = -\infty$
$\sin.\left\|\begin{matrix}\frac{3}{2}\pi \\ 3.90^\circ\end{matrix}\right. = -1$	$\cos.\left\|\begin{matrix}\frac{3}{2}\pi \\ 3.90^\circ\end{matrix}\right. = 0$	$\text{tang.}\frac{3}{2}\pi = -\infty$	$\cot.\frac{3}{2}\pi = 0$
$\sin.2\pi = 0$	$\cos.2\pi = 1$	$\text{tang.}2\pi = 0$	$\cot.2\pi = \infty$

Und wenn ein Bogen überhaupt z genannt wird, so ist, nach den obigen bewiesenen Lehrsätzen und nur kurzen Wiederholung, wenn der Radius immer $= 1$.

I. $(\sin.z)^2+(\cos.z)^2=1$.
$(\tang.z)\ (\cot.z)=1$.

II. $\sin.z=\cos.\measuredangle \tang.z$

$$\sin.z=\frac{\cos.z}{\cot.z}$$

III. $$\cos.z=\frac{\sin.z}{\tang.z}$$

$\cos.z=\sin.z\,.\,\cot.z$

IV. $$\tang.z=\frac{\sin.z}{\cot.z}$$

$$\tang.z=\frac{1}{\cot.z}$$

V. $$\cot.z=\frac{\cos.z}{\sin.z}$$

$$\cot.z=\frac{1}{\tang.z}.$$

VI. $\tang.x:\tang.z=\cot.z:\cot.x.$

Welche Formeln man in Bereitschaft haben muß, wenn man in trigonometrischen Rechnungen fortkommen will.

§. 721. **Lehrs.** Das Quadrat des Radii, oder $(\cos.\varphi)^2+(\sin.\varphi)^2$ ist das Product von zween unmöglichen Factoribus, deren einer der Cos. plus das Product Sin. in die Quadratwurzel aus minus eins, der andere Cos. minus dem Product vom Sin. in die Quadratwurzel aus minus eins ist.

Satz.

$$r^2=(\cos.\varphi+\sin.\varphi\sqrt{\ }-1)\ (\cos.\varphi-\sin.\varphi\sqrt{\ }-1)$$

Bew.

$r^2=(\cos.\varphi)^2+(\sin.\varphi)^2$ nach §. 700.

$(\cos.\varphi)^2+(\sin.\varphi)^2=\cos.\varphi+\sin.\varphi\sqrt{\ }-1$ multipl. mit (denn wenn man wirkl. mult. so ist

$\cos.\varphi-\sin.\varphi\sqrt{\ }-1$.

$(\cos.\varphi)^2+\cos.\varphi\sin.\varphi\sqrt{\ }-1$

$-\cos.\varphi\sin.\varphi\sqrt{\ }-1-(\sin.\varphi)^2-1$

d. i. $\cos.\varphi^2-(\sin.\varphi)^2-1$

aber $-\sin.\varphi^2\,.\,-1=+(\sin.\varphi)^2$ nach §. 143.

$(\cos.\varphi)^2+(\sin.\varphi)^2=(\cos.\varphi+\sin.\varphi\sqrt{\ }-1)\measuredangle$
$(\cos.\varphi-\sin.\varphi\sqrt{\ }-1)$

folgl. $r^2=(\cos.\varphi+\sin.\varphi\sqrt{\ }-1)\ (\cos.\varphi-\sin.\varphi\sqrt{\ }-1)$

§. 722.

§. 722. **Zusatz.** Zween unmögliche Factores können also ein mögliches und reelles Product geben.

§. 723. **Zus.** Wenn man mit dem Quadrat des Radius dividirt, so ist

$$1 = \frac{(\cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1})\,(\cos.\varphi - \sin.\varphi\sqrt{-1})}{r \quad\quad r}$$

§. 724. **Zus.** r fällt ganz weg, wenn der Radius = 1 gesetzt wird; ferner ist der obige Ausdruck allemal einem völligen Quadrat gleich, oder zweyen Quadraten, die sich in eins verwandeln lassen.

§. 725. **Anm.** Dieser Lehrsatz ist im folgenden ungemein fruchtbar, und hat seinen Nutzen auch in der höhern Geometrie, man muß ihn sich dahero wohl bekannt machen. Man siehet zugleich, was die eingebildete oder unmögliche Wurzeln, davon wir oben gehandelt, in schicklicher Zerfällung der Factorum für einen Nutzen haben.

Allgemeine Theorie der trigonometrischen Rechnung.

§. 726. **Lehrs.** In einem jeden geradelinigten Dreyeck verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der ihnen opponirten Winkel; und umgekehrt. Denn es sey *Fig.* 87. das Dreyeck ABC gegeben; man beschreibe einen Cirkel darum, weil sich um ein jedes Dreyeck ein Cirkel beschreiben läßt nach §. 555. so werden die abgeschnittene Cirkelbögen AEB, BFC u. s. w. die Hälften des Maases der entgegenstehenden Winkel C, A seyn nach §. 478. folglich die halbe Bögen das Maas der ganzen Winkel; der halben Bögen Sinus aber sind die halbe Chorden, oder die halbe Seiten, die den Winkeln opponirt sind; nach §. 687. Dahero der Beweis leicht ist:

Satz. *Fig.* 87.

sin. c : AB = sin. A : BC.

Bew.

sin. c = $\frac{1}{2}$AB; sin. A = $\frac{1}{2}$BC nach §. 687. folglich
sin. c : $\frac{1}{2}$AB = sin. A : $\frac{1}{2}$BC und versetzt
sin. c : sin. A = $\frac{1}{2}$AB : $\frac{1}{2}$BC

sin. c : sin. A = AB : BC. q. e. d.

§. 727. Zusatz. Eben so beweißt man es vom dritten Winkel, daß sin. B : sin. A = AC : BC; dahero der Lehrsatz allgemein ist.

§. 728. Lehrs. Alle trigonometrische Linien, das ist, Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, u. s. w. verhalten sich bey ähnlichen Bogen wie die Radii. Denn *Fig.* 86. ist Cd : de = CD : DE; nun sind Cd, CD Radii, der eine sey r, der andere R, die andere zwo Linien sind die Sinus der ähnlichen Bogen DA, da; folglich Cd : r = CD : R, oder Cd : CD = r : R; Eben so wird der Beweis bey den übrigen trigonometrischen Linien geführt.

§. 729. Lehrs. In einem jeden geradelinigten Dreyeck kann von einer angenommenen Spitze eine gerade Linie unter beliebigem Winkel auf die Grundlinie herabgezogen werden, alsdann verhalten sich die Abschnitte der Grundlinie durch die correspondirende Seiten dividirt, wie die Sinus der opponirten neu entstandenen Winkel. Denn es werde *Fig.* 88. α aus der Spitze E die Linie ED unter was für einem Winkel man will, auf AB gezogen, so ist folgender Satz zu erweisen.

Satz. *Fig.* 88. *a.*

$$\text{sin. o} : \text{sin. s} = \frac{AD}{AE} : \frac{DB}{EB}.$$

Bew.

$$\left.\begin{array}{l}\text{sin. o} : \text{sin. n} = AD : AE \\ \text{sin. m} : \text{sin. s} = EB : DB\end{array}\right\} \text{§. 726.}$$

$$\text{sin. o} \asymp \text{sin. m} : \text{sin. s} \asymp \text{sin. n} = AD \cdot EB : AE \cdot DB.$$

sin. m = sin. n nach §. 689. folglich substituirt

$$\text{sin. o} \asymp \text{sin. n} : \text{sin. s} \asymp \text{sin. n} = AD \cdot EB : AE \cdot DB$$

$$\text{sin. o} : \text{sin. s} = \frac{\dfrac{AD \cdot EB : AE \cdot DB}{\text{sin. n}}}{AE} : \frac{DB}{\text{sin. n}}$$

$$= \frac{\dfrac{AD \cdot EB}{AE} : DB}{\text{sin. n}} : EB$$

$$= \frac{AD}{AE} : \frac{CA}{EB} \quad \text{also}$$

$$\text{sin. o} : \text{sin. s} = \frac{AD}{AE} : \frac{DB}{EB}.$$

§. 730. Zus. Man könnte den Satz auch so ausdrucken, die Sinus sind in diesem Fall, unter den Bedingungen §. 729. in ratione directa Segmentorum Basis, und inversa laterum.

§. 731. Lehrs. Wenn in einem gleichschenklichten Dreyeck der Winkel am Scheitel, oder an der obern Spitze in zween gleiche getheilt, und von dem Theilungspunkt eine gerade Linie auf die Grundlinie gezogen wird, so wird

I. Der Sinus des halbirten Winkels die halbe Grundlinie durch die eine Seite dividirt,

II. Eine jede Seite die halbe Grundlinie durch den Sinus des halben Winkels dividirt; und

III. Die halbe Grundlinie das Product einer Seite in den Sinus des halben Winkels seyn, wenn der Sinus totus oder Radius = 1; wir wollen ihn aber mehrerer Deutlichkeit halben im Beweis = r setzen, den Winkel u, folglich den Sinus des halben Winkels Sin. $\frac{1}{2}$u nennen. Die Basis heisse d, die Seite a; so ist nach *Fig.* 88. β.

I. Satz. *Fig.* 88. β.

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}b \cdot r}{a} = \frac{br}{2a}$$

Bew.

ΔLMN ist gleichschenklicht nach der Voraussetzung, folgl. da auch o = n = $\frac{1}{2}$u; nach der Voraussetzung, so ist,

LP = PN = $\frac{1}{2}$LN = $\frac{1}{2}$b. und bey P rechte Winkel, daher

LM : LP = sin. tot. : sin. o das ist in Buchstaben

a : $\frac{1}{2}$b = r : sin. $\frac{1}{2}$u folglich

$$\frac{\frac{1}{2}b \cdot r}{a} = \frac{br}{2a} = \text{sin. } \tfrac{1}{2}u.$$

u. wenn r = 1, so ist $\frac{b}{2a}$ = sin. $\frac{1}{2}$u

II. Satz. $a = \frac{r \cdot \frac{1}{2}b}{\text{sin. } \frac{1}{2}u} = \frac{br}{2\,\text{sin. } \frac{1}{2}u}$

Bew.

sin. o : LP = sin. tot. : LM das ist in Buchstaben

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}u : \tfrac{1}{2}b = r : a = \frac{\frac{1}{2}b \cdot r}{\text{sin. } \frac{1}{2}u} = \frac{br}{2\,\text{sin. } \frac{1}{2}u}.$$

III. Satz. $\frac{1}{2}b = \frac{a \cdot \text{sin. } \frac{1}{2}u}{r}$

Bew.

sin. tot. : LM = sin. o : LP das ist in Buchstaben

$$r : a = \text{sin. } \tfrac{1}{2}u : \tfrac{1}{2}b = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}u \cdot a}{r}.$$

§. 732. Anm. Diese drey Formeln hat man sich bekannt zu machen, wenn man in dem Rechnen schnell fortkommen will, sie sind, wenn der Radius = 1, nochmalen folgende: I. $\sin.\frac{1}{2}u = \frac{b}{2a}$; II. $a = \frac{b}{2\sin.\frac{1}{2}u}$; III. $\frac{1}{2}b = a \cdot \sin.\frac{1}{2}u$. oder $b = 2a \cdot \sin.\frac{1}{2}u$.

§. 733. Lehrsatz. Die Grundlinie in dem nämlichen Dreyeck ist gleich dem Product einer Seite in den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Cosinus desselben halben Winkels dividirt.

Satz. *Fig.* 88. *β.*

$$b = \frac{a \cdot \sin. u}{\cos.\frac{1}{2}u.}$$

Bew.

$MP = \cos. o$

$\cos. o = \cos.\frac{1}{2}u$

$MP = \cos.\frac{1}{2}u.$

$MP = \sin. N$ folglich

$\sin. N = \cos.\frac{1}{2}u.$ da nun

$LN : LM = \sin. o + n : \sin. N.$ das ist subst.

$b : a = \sin. u : \cos.\frac{1}{2}u$ so ist

$$\frac{a \cdot \sin. u}{\cos.\frac{1}{2}u} = b.$$

§. 734. Zusatz. Weil $b = 2a \cdot \sin.\frac{1}{2}u$ nach §. 732. und nach dem unmittelbar vorhergehenden §. 733. $b = \frac{a.\sin.u}{\cos.\frac{1}{2}u}$, so gibt es folgende Rechnung:

$b = 2a \cdot \sin.\frac{1}{2}u$

$$b = \frac{a \cdot \sin. u}{\cos.\frac{1}{2}u}$$

$$2a \cdot \sin. \tfrac{1}{2}u = \frac{a \cdot \sin. u}{\cos. \tfrac{1}{2}u}$$

$$\frac{}{2a \cdot \sin. \tfrac{1}{2}u \cdot \cos. \tfrac{1}{2}u} \cdot \cos. \tfrac{1}{2}u$$

$$2a \cdot \sin. \tfrac{1}{2}u \cdot \cos. \tfrac{1}{2}u = a \cdot \sin. u.$$

$$\frac{}{2 \cdot \sin. \tfrac{1}{2}u. \cos. \tfrac{1}{2}u = \sin. u.} : a$$

§. 735. Lehrs. Das Quadrat vom Sinus des halben Winkels ist dem halben Product aus dem Sinus totus oder Radius in die Differenz des Radius und Cosinus, oder welches gleichviel ist, aus dem halben Product aus dem Radius in den Sinus versus oder Quersinus gleich. Denn man ziehe die Linie LQ auf MN perpendicular, so ist LQ der Sinus des ganzen Winkels $o + n$, das ist des Winkels u, wie wir ihn bisher genannt; man nenne $LQ = p$, so ist $p = \sin. \frac{1}{2}u$.
Der Cosinus von u, neml.
MQ heisse π; so ist $MQ = \pi$ und $\pi = \cos. u$.
LP der Sinus von o ist der Sinus des halben Winkels u; er heisse q; so ist $LP = q$, und $q = \sin. \frac{1}{2}u$; dem zu Folge wird nach der *Fig.* 88. β der obige Lehrsatz in den erklärten Buchstaben der folgende seyn: Satz. *Fig.* 88. β.

$$q^2 = \frac{(r - \pi)r}{2}$$

Bew.

$RM : MQ = LO : OQ$
$RM = LM$ weil $o = n$ nach §. 533.

$LM : MQ = LO : OQ$ oder invertendo
$MQ : LM = OQ : LO$ und addendo
$MQ + LM : LM = OQ + LO : LO$
$OQ + LO = LQ$ in der Figur

Nr. I. $MQ + LM : LM = LQ : LO$ d. i. in Buchstaben, wo für den Radius $LM = r$ gesetzt wird,

$$r + \pi : r = p : \frac{rp}{r+\pi} = LO$$

$\triangle LPO \sim \triangle LQN$. weil P und Q rechte, und der Winkel bey L gemeinschaftlich ist: Es ist ferner

dahero $LQ : LN = LP : LO$ das ist in Buchstaben, weil $LN = 2LP = 2q$.

Nr. II.

$$p : 2q = q : \frac{2q^2}{p} = LO.$$

Nun ist nach Nr. I. auch $\frac{rp}{r+\pi} = LO.$ folglich

$$\frac{2q^2}{p} = \frac{rp}{r+\pi}$$

$$\cdot p$$

$$2q^2 = \frac{rp^2}{r+\pi}$$

$$: 2$$

$$q^2 = \frac{rp^2}{2(r+\pi)}$$

man multiplicire den Bruch beederseits, nemlich den Zehler und Nenner mit $r - \pi$, so bleibt er unverändert nach §. 56.

$$q^2 = \frac{rp^2(r-\pi)}{2(r+\pi)(r-\pi)}$$

Es ist aber $(r+\pi)(r-\pi) = r^2 - \pi^2$ nach §. 147. folgl. subst.

$$q^2 = \frac{rp^2(r-\pi)}{2(r^2-\pi^2)}$$

Es ist aber nach §. 702. nemlich das Quadr. des Rad. minus dem Quadr. des Cos. = dem Quadr. des Sin. der p heißt. $r^2 - \pi^2 = p^2$;

das ist, wenn man mit p^2 aufhebt

$$q^2 = \frac{rp^2(r-\pi)}{2 \cdot p^2}$$

$q^2 = \frac{r(r-\pi)}{2}$ welches der obige Lehrsatz ist, und also zu erweisen war.

§. 736. **Zusatz.** Weil $r - \pi =$ sin. versus, nach §. 719. so ist auch $q^2 = \frac{r \cdot \text{sin. vers.}}{2}$

§. 737. **Lehrsatz.** Wenn man zween solche Winkel wie u betrachtet, und beede halbiret, so ist das Product aus der Summe der Sinuum dieser halbirten Winkel in ihre Differenz, dem halben Product des Radii in die Differenz ihrer Cosinuum gleich. Denn es sey der andere Winkel w, sein Sinus heisse l, oder sin. $w = l$, cos. $w = \lambda$ und sin. $\frac{1}{2}w = t$; so wird, wie oben §. 735. seyn $t^2 = \frac{r(r-\lambda)}{2}$; und der Lehrsatz in Buchstaben folgender masen ausgedruckt werden:

Satz. *Fig.* 88. *β.*

$$(\text{sin.}\tfrac{1}{2}u + \text{sin.}\tfrac{1}{2}w)(\text{sin.}\tfrac{1}{2}u - \text{sin.}\tfrac{1}{2}w) = \frac{r(\text{cos. } w - \text{cos. } u)}{2}$$

Beweis.

Es ist nach §. 735. $q^2 = \frac{r(r-\pi)}{2}$

also auf solche Weise $t^2 = \frac{r(r-\lambda)}{2}$ subtr.

folgl. $q^2 - t^2 = \frac{r(r-\pi)}{2} - \frac{r(r-\lambda)}{2}$ oder wirkl. die Producte durch die Multipl. hingesetzt,

$= (r^2 - r\pi) - (r^2 - r\lambda)$ d. i. nach §. 140.

$= \frac{r^2 - r\pi - r^2 + r\lambda}{2}$, u. was sich aufhebt, nemlich $r^2 - r^2$ aufgehoben

$= \frac{r\lambda - r\pi}{2} = \frac{r(\lambda - \pi)}{2}$ und in der Bedeut. der Buchstaben λ u. π;

q^2

$q^2 - t^2 = \frac{r(\cos. w - \cos. u}{2}$ Es ist ferner nach der Bedeutung der Buchst. q u. t

$q^2 - t^2 = (\sin. \frac{1}{2}u)^2 - (\sin. \frac{1}{2}w)^2$ aber es ist nach §. 147.

$(\sin. \frac{1}{2}u)^2 - (\sin. \frac{1}{2}w)^2 = (\sin. \frac{1}{2}u + \sin. \frac{1}{2}w)$.

$(\sin. \frac{1}{2}u - \sin. \frac{1}{2}w)$ folgl.

$(\sin. \frac{1}{2}u + \sin. \frac{1}{2}w)(\sin. \frac{1}{2}u - \sin. \frac{1}{2}w) = \frac{r(\cos. w - \cos. u)}{2}$

§. 738. Zus. Wenn der Winkel w kleiner ist als u, wie er im Beweis angenommen wurde, so ist sein Cosinus gröser als der Cos. des grösern Winkels, nach §. 703. dahero die Differenz der Cosinuum so zu verstehen, daß der Cosinus des grösern vom Cosinus des kleinern abgezogen wird; sonst würde die Differenz und also auch das Product negativ. Es heißt dahero nicht $\frac{r(\cos. u - \cos. w)}{2}$ sondern umgekehrt $r(\cos. w - \cos. u)$; wenn gleich der Winkel w kleiner als u ist.

§. 739. Anm. Diese Lehrsätze sind ungemein fruchtbar, ungeachtet sie in den meisten mathematischen Handbüchern, besonders die nicht ganz neu sind, vermißt werden; aber eben deßwegen hat man sich desto genauer mit ihnen bekannt zu machen.

Die Erfindung der Sinus von den Summen und Differenzen der Bogen, aus den gegebenen Sinussen, und andern trigonometrischen Linien.

§. 740. Lehrsatz. Wenn die Sinus zweyer Bogen gegeben sind, so kann man den Sinus ihres Unterschieds finden; er ist nemlich das Product aus dem Cos. des einen in den Sinus der Summe, weniger dem Product vom Sinus des andern in den Cosinus

sinus der Summe gleich, wenn der Radius eins ist, oder wenn er = r, so wird diese Differenz durch den Radius dividirt. Es sey in der *Fig.* 95. CA der Radius = r, die Bögen AB, BD, und ihre Summe AD, der Sinus von AB ist BE, der von BD ist DG, und der von AD ist DF, nun seyen

BE = m und sein cos. CE = μ
DG = d cos. GC = δ
DF = s cos. FC = σ so ist in Buchstaben der obige Lehrsatz also ausgedruckt:

Satz. *Fig.* 95.

$$\frac{\mu s - m\sigma}{r} = d = DG.$$

Beweis.

nr. I. CE : EB = CF : FI das ist in Buchstaben

$$\mu : m = \sigma : FI; \text{ also } FI = \frac{m\sigma}{\mu}$$

$$CE : CB = CF : CI$$

$$\mu : r = \sigma : CI, \text{ also } CI = \frac{r\sigma}{\mu}$$

Es ist ferner DI = DF — FI. d. i. in Buchstaben

nr. II. $DI = s - \frac{m\sigma}{\mu}$ und unter einerley Benennung

$$DI = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu}; \text{ weiter ist}$$

nr. III. $\triangle DGI \sim \triangle IFC$ weil G und F rechte, und bey I folgl. Verticalwinkel,

CI : FC = DI : DG. d. i. nach den gefundenen Ausdrücken nr. I. u. II.

$\frac{r\sigma}{\mu} : \sigma = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} : \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} \cdot \sigma : \frac{r\sigma}{\mu} =$ DG wenn man nun diesen Ausdruck wirkl.

wirkl. multipl. u. dividirt, nach §. 156. und wenn man richtig aufhebt, so ist

$$DG = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} \cdot \sigma \cdot \frac{\mu}{r\sigma} = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} \cdot \frac{\mu\sigma}{r\sigma} = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} \cdot \frac{\mu}{r}$$

$$= \frac{\mu\mu s - \mu m\sigma}{\mu r} = \frac{\mu s - m\sigma}{r} = d = DG. \text{ wie oben.}$$

§. 741. **Zusatz.** Wenn der Radius $= 1$, so ist die Differenz $d = \mu s - m\sigma$.

§. 742. **Lehrsatz.** Aus den Sinussen zweyer Bogen kann man auch den Sinus der Summe dieser Bogen finden. Er ist nemlich, wenn die Buchstaben bleiben wie vorhin,

Satz. *Fig.* 95.

$$\frac{\mu d + \delta m}{r} = s = DF.$$

Bew.

$CF : CI = DG : DI$ und in Buchstaben und gefundenen Ausdruck §. 740.

$$\sigma : \frac{r\sigma}{\mu} = d : \frac{r\sigma d}{\mu\sigma} = \frac{rd}{\mu} \text{ also } DI = \frac{rd}{\mu}$$

$CF : FI = DG : GI$

$CF : FI = CE : EB$

$CE : EB = DG : GI$

$$\mu : m = d : \frac{dm}{\mu} \text{ also } GI = \frac{dm}{\mu} \text{ ferner}$$

$CI = CG - GI$. das ist

$$CI = \delta - \frac{dm}{\mu} = \frac{\mu\delta - md}{\mu}, \text{ also } CI = \frac{\mu\delta - md}{\mu}$$

$CB : BE = CI : IF$

$$r : m = \frac{\mu\delta - md}{\mu} : \frac{m\mu\delta - mmd}{\mu r} \text{ also } IF = \frac{m\mu\delta - mmd}{\mu r}$$

$DF = DI + IF$ oder nach den gefundenen Ausdrücken

$DF = \frac{rd}{\mu} + \frac{\mu md - mmd}{r\mu}$ und unter einerley Benennung,

$DF = \frac{rrd\mu + \mu\mu md - \mu mmd}{r\mu\mu}$ und mit μ oben u. unten aufgeh.

$DF = \frac{rrd + \mu md - mmd}{r\mu}$ und schicklicher ausgedruckt

$DF = \frac{(rr - mm)d + \mu md}{r\mu}$ es ist aber

$rr - mm = \mu\mu$ nach §. 700. dieses subst. gibt

$DF = \frac{\mu\mu d + \mu md}{r\mu}$ und durch μ oben und unten aufgehoben, gibt

$DF = \frac{\mu d + md}{r} = s.$ welches der oben zu erweisende Lehrsatz war.

§. 743. **Zusatz.** Ist $r = 1$, so ist $s = DF = \mu d + md$.

§. 744. **Zusatz.** Wenn man den Lehrsatz nach der Bedeutung der Buchstaben ausdruckt, und die zween Bogen x und y nennt, so ist $\sin.(x+y) = (\cos.x . \sin.y + \sin.x . \cos.y)$.

§. 745. **Zus.** Wenn $x = y$. so ist $\sin.(x+y) = \sin. 2x = (\cos. x . \sin. x + \sin. x . \cos. x) = 2(\sin. x . \cos. x)$.

§. 746. **Lehrsatz.** Der Cosinus von der Summe zweyer Bogen, ist gleich dem Product der beeden Cosinuum, weniger dem Product der beeden Sinuum der einzeln Bögen. Denn man ziehe *Fig.* 94. welche wie die 95 ist, noch aus dem Punkt

G,

G, die Linie GK mit FA parallel, und fälle aus G die Perpendicularlinie GH auf AC herab, so ist der Satz bald erwiesen.

Satz. *Fig.* 94.

$$(\cos. x . \cos. y) - (\sin. x . \sin. y) = \cos. x + y.$$

Beweis.

nr. I. CB : CE = CG : CH. das ist im Wehrt dieser Linien

1 : cos. x = cos. y : CH also CH = (cos. x . cos. y)

weil ferner △DGK ∽ △IGK ∽ △ICF ∽ △BCE, §. 532.

so ist CB : BE = DG : GK. d. i. im Wehrt der Linien

1 : sin. x = sin. y : GK also GK = (sin. x . sin. y.)

weiter ist cos. (x + y) = CF = CH — FH = CH — GK.

aber CH — GK = (cos. x . cos. y) — (sin. x . sin. y.)

cos. (x+y) = (cos. x . cos. y) — (sin. x . sin. y).

§. 747. **Zusatz.** Wenn x = y, so ist cos. 2x = $(\cos. x)^2 - (\sin. y)^2$

§. 748. **Zusatz.** Ferner ist kraft des unmittelbaren Gegensatzes cos. (x — y) = (cos. x . cos. y) + (sin. x . sin. y), wie auch aus §. 740. erhellet.

§. 749. **Zusatz.** Wenn x = y, so ist cos. (x — x) = cos. 0 = $(\cos. x)^2 + (\sin. x)^2$ = 1. nach §. 720. daher auch aus dieser Folge die Richtigkeit des obigen Zusatzes §. 748. erhellet.

§. 750. **Zusatz.** Weil der tang. $x = \frac{\sin. x}{\cos. x}$

so ist auch tang. $(x + y) = \frac{\sin. (x+y)}{\cos. (x+y)}$ folglich

wenn man obige Wehrte substituirt tang. (x + y)

$$= \frac{(\sin. x . \cos. y) + (\cos. x . \sin. y)}{(\cos. x . \cos. y) - (\sin. x . \sin. y)}$$

§. 751. **Lehrsatz.** Der Cosinus des Bogen x, mit seinem durch $\sqrt{-1}$ multiplicirten Sinus, zur Dignität n erhoben, und durch den Radius in der Dignität n dividirt, ist der durch den Radius dividirten Summe des Cos. vom nfachen Bogen, und des mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Sinus dieses nfachen Bogens gleich.

Beweis.

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})(\cos.x-\sin.x.\sqrt{-1})}{r\quad r}=1$, nach §. 723.

Man setze für den zweyten Faetor, $(\cos.y+\sin.y\sqrt{-1})$ so ist

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})(\cos.y+\sin.y\sqrt{-1})}{rr}=$ wenn man wirkl. multipl.

$=\frac{(\cos.x.\cos.y-\sin.x.\sin.y)}{rr}+\frac{(\cos.x.\sin.y+\sin.x.\cos.y)\sqrt{-1}}{rr}$ aber

$\frac{\cos.x.\cos.y-\sin.x.\sin.y}{r}=\cos.(x+y)$ nach §. 746. und

$\frac{(\cos.x.\sin.y+\sin.x.\cos.y)}{r}=\sin.(x+y)$ nach §. 744.

folglich

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})(\cos.y+\sin.y\sqrt{-1})}{rr}$

$=\frac{\cos.(x+y)+(\sin.x+y)\sqrt{-1}.}{r}$

es sey $x=y$; so ist

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})\ (\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})}{rr}$

$=\frac{\cos.2x+\sin.2x\sqrt{-1}}{r}$ das ist

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})^2}{rr}=\frac{\cos.2x+\sin.2x\sqrt{-1}}{r}$ und

(cos.

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})^3}{rrr} = \frac{\cos.3x+\sin.3x\sqrt{-1}}{r}$; u. allgemein

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})^n}{rn} = \frac{\cos.nx+\sin.nx\sqrt{-1}.}{r}$

§. 752. **Zusatz.** Weil die Rechnung bey negativen Zeichen eben diese Regeln befolgt, so wird aus gleichem Grund $(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})(\cos.y-\sin.y\sqrt{-1}) = \cos.(y+x)-\sin.(y+x)\sqrt{-1}$ also ist $\frac{(\cos.x\pm\sin.x\sqrt{-1})^2}{r^2} = \frac{\cos.2x\pm\sin.2x\sqrt{-1}.}{r}$

u. allgemein $\frac{(\cos.x\pm\sin.x\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos.nx\pm\sin.nx\sqrt{-1}}{r}$

eine allgemeine und fruchtbare Formel, wo der Exponent n, nach der Voraussetzung, eine ganze Zahl ist.

§. 753. **Zusatz.** Wenn also z einen Bogen bedeutet, so kann der Sinus von dem nfachen Bogen oder sin. nz bald gefunden werden. Denn es ist

$\frac{(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos.nz\sin.+nz\sqrt{-1}}{r}$

$\frac{(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos.nz-\sin.nz\sqrt{-1}}{r}$ subtrah.

$\frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n-(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{2\sin.nz\sqrt{-1}}{r}$

$\frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n-(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n-1} = 2\sin.nz\sqrt{-1}$ nach §. 175.

$: 2\sqrt{-1}$

$\frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n-(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{2r^n-1\sqrt{-1}} = \sin, nz.$

§. 754. **Zusatz.** Eben so wird, wenn man was oben subtrahirt war, addirt, und die Summe durch r beederseits multiplicirt, und mit 2 dividirt,

$$\text{der cos. } nz = \frac{(\cos.z + \sin.z\sqrt{-1})^n + (\cos.z - \sin.z\sqrt{-1})^n}{2r^n - 1}$$

gefunden; woraus sich kraft des binomischen Lehrsazes der sin. und cos. nz durch eine unendliche Reyhe, und wenn er durch eine ganze Zahl bestimmt wird, in endlichen Ausdrücken finden läßt. Wir werden davon in dem vierten Hauptstück noch was melden.

Die Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreyecks aus drey gegebenen Stücken, eine Seite mit darunter gerechnet.

§. 755. **Lehrsatz.** In einem jeden ungleichseitigen Dreyeck läßt sich aus zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite durch Rechnung bestimmen. Denn es sey *Fig.* 87. im Dreyeck ABC, AB und AC nebst dem Winkel A gegeben, man suche BC; um die Erfindung allgemein und wegen dem folgenden desto fruchtbarer zu machen, wollen wir hie nicht die längst bekaunte Auflösung allein anbringen, sondern durch die Buchstabenrechnung aus der Natur der trigonometrischen Linien die Sache erweisen. Es sey

AB = a, sin. A = p; cos. A = π
AC = b sin. B = m; cos. B = μ
BC = c

Satz.

Satz. *Fig.* 87.

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\pi}$.

Beweis.

$BCA = 180° - (A+B)$ §. 464.

$\sin. BCA = \sin. BCK$ §. 688.

$\sin. BCK = \sin. (A+B)$

$\sin. BCA = \sin. (A+B)$

$\sin. (A+B) = m\pi + \mu p$, nach §. 742.

nr. I. wenn man die hier vorkommende Buchstaben substit.

$\sin. BCA$ oder $\sin. c = m\pi + \mu p$. Es ist ferner

$BC : \sin. A = AB : \sin. c$ nach §. 726. u. in Buchst.

$c : p = a : \frac{ap}{c} = \sin. c.$ aber nach nr. I.

nr. II. $\frac{m\pi + \mu p = \sin. c}{\frac{ap}{c} = m\pi + \mu p.}$

weiter ist

$BC : \sin. A = AC : \sin. B$ §. 726. oder in Buchstaben

nr. III. $c : p = b : \frac{bp}{c} = \sin. B = m.$

Nun ist $(\cos. B)^2 = \mu^2 = 1 - (\sin. B)^2$ §. 703.

u. im Wehrt von $\sin. BC$

$= 1 - \frac{b^2 p^2}{c^2}$ und unter einerley Benennung gebracht

$= \frac{c^2 - b^2 p^2}{c^2}$ also

nr. IV. $\cos. B = \mu = \frac{\sqrt{(c^2 - b^2 p^2)}}{c}$

Wenn man nun substituirt, so ist, weil

nach nr. I. $\sin. c = m\pi + \mu p = \frac{bp\pi}{c} + \frac{p\sqrt{c^2 - b^2 p^2}}{c}$

nach nr. III. IV.

aber

aber $m\pi + \mu p = \frac{ap}{c}$ nach nr. II.

folglich

$$\frac{\frac{bp\pi}{c} + \frac{p\sqrt{c^2 - b^2p^2}}{c} = \frac{ap}{c}}{}\ .c$$

$$\frac{bp\pi + p\sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = ap}{}\ :p$$

$$\frac{b\pi + \sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = a}{}$$

$b\pi = b\pi$ subtr.

$$\frac{\sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = a - b\pi}{}$$ und quadrirt

$c^2 - b^2p^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2\pi^2$

$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2\pi^2$

$\pi^2 = 1 - p^2$ §. 700.

$$\frac{c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2(1 - p^2)}{}$$ d. i.

$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2 - p^2b^2$

$p^2b^2 = p^2b^2$ add.

$$\frac{c^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2}{}$$ folglich

$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\pi)}$

§. 756. **Zusatz.** Aus drey gegebenen Seiten werden die Winkel bestimmt. Denn es sey alles wie vorhin; so gibt es folgende Rechnung.

$a^2 + b^2 - 2ab\pi = c^2$ und $2ab\pi$ herüber gesetzt

$$\frac{a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\pi}{}\ :2ab$$

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pi$ und beederseits 1 addirt

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + 1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{2ab} = 1 + \pi$ Es ist aber

a^2

$$a^2+2ab+b^2-c^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} = 1+\pi$$

und eben so wenn man subtr. π von 1,

$$2ab-a^2-b^2+c = \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab} = 1-\pi$$

und aus dem beederseitigen Product die Quadratwurzel

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}}$$

$$= \sqrt{(1-\pi^2} = p;$$

Denn $1-\pi^2 = p^2$ nach §. 700. da man nun p^2 folglich auch p den Sinus eines Winkels aus den drey Seiten gefunden, so hat man den Winkel, und kann die übrige Winkel leicht finden.

§. 757. **Lehrsatz.** Aus einer Seite und zween Winkeln, oder aus zwo Seiten und einem Winkel, der aber nicht von ihnen eingeschlossen ist, lassen sich nach §. 726. leicht die übrige Stücke bestimmen. Denn es sey *Fig.* 90. AC, A und B gegeben; so verhält sich

$$\text{nr. I. } \sin. B : AC = \sin. A : BC = \frac{AC . \sin. A}{\sin. B}$$

Wenn ferner *Fig.* 91. A und C, nebst AC gegeben sind, so ist auch aus A und C der Winkel B gegeben, nemlich $= 180° - (A+C)$ nach §. 464. folglich

$$\text{nr. II. } \left\{ \begin{array}{l} \sin. 180. - (A+C) : AC = \\ \sin. B : AC = \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin. C : AB \\ \sin. A : BC. \end{array}$$

§. 758. **Zusatz.** Weil der sin. C, oder sin. A, oder sin. B auch dem Sinus des Nebenwinkels gleich, folglich der Sinus eines stumpfen und spitzigen Winkels seyn kann §. 688. so muß man wissen, ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf ist; das ist, ob das ungleichseitige Dreyeck stumpfwinklicht oder spitzwinklicht ist; sonst wäre die Aufgabe unbestimmt.

§. 759. **Lehrsatz.** In einem rechtwinklichten Dreyeck kann man aus den zwo Seiten nebst dem eingeschlossenen rechten Winkel die übrige Winkel und Seiten finden. Denn man ziehe *Fig.* 89. aus C mit dem Radius CA den Bogen AD, so ist AB die Tangente von C. folglich

CA : AB = fin. tot. tang. C. wenn man C gefunden, so findet man die dritte Seite nach dem obigen Lehrsatz nr. I.

§. 760. **Lehrsatz.** Aus zwo Seiten und dem eingschlossenen Winkel eines ungleichseitigen stumpf- oder spitzwinklichten Dreyecks kann man die übrige Winkel und Seiten noch anders als §. 755. finden.

Denn es sey *Fig.* 92. BC, BF nebst dem Winkel CBF oder c gegeben, so wird unter den gesuchten Winkeln o + r der grösere und s der kleinere seyn; oder umgekehrt, weil das Dreyeck ungleichseitig, folglich kein Winkel dem andern gleich ist; es wird also nach §. 318. die halbe Summe plus die halbe Differenz dieser beeden gesuchten Winkel der grosen Winkel seyn. Man suche also die halbe Differenz; welches geschieht, wenn man aus B mit dem Radius BC einen halben Cirkel beschreibt, die Sehne CE zieht, und auf F die Seite DF mit CE parallel, welche durch die von A durch C gehende Linie AD geschnitten und bestimmt wird, so ist CD die Tangente der halben Differenz, welche gefunden wird, weil

AF : EF = AD : CD; und die drey erste Glieder bekannt sind.

Beweis.

$\left.\begin{array}{l} m = (o + r) + s. \\ m = o + n \end{array}\right\}$ §. 470.

$(o + r) + s = o + n$

$o = n$ nach §. 439.

$(o + r) + s = 2n$

$\frac{(o + r) + s}{2} = n$

$n = s + p$

$\frac{(o + r) + s}{2} = s + p.$ die halbe Summe der Winkel

$s = s$ der kleine gesuchte Winkel

$\frac{(o + s) + s}{2} - s = p$ und CD = tang. p.

AF

AF : EF = AD : CD das ist, weil AB = BC = und AD tang. s + p = tang. semi summæ der gesuchte Winkel

BF + BC : BF — BC = tang. (s + p) : tang. p

Das ist in Worten, die Summe der zwo gegebenen Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der gesuchten Winkel zur Tangente der halben Differenz; addirt man nun diese gefundene halbe Differenz zur halben Summe, so hat man den grosen Winkel, und sofort nach §. 758. die dritte Seite.

§. 761. **Lehrsatz.** Aus drey Seiten eines ungleichseitigen Dreyecks lassen sich die drey Winkel finden.

Es seyen *Fig.* 93. im Dreyeck ACB die Seiten AC, CB, AB gegeben, man beschreibe aus dem Punkt C mit der kleinsten Seite CB, als dem Radius, einen Cirkel HBDF; man verlängere AC bis an die Peripherie des Cirkels H; so ist AH = AC + CB, und AF = AC — CB, weil CF = CB = CH = Radius; ferner ist nach §. 537. AB : AH = AF : AD; das ist

AB : AC + CB = AC — CB : AD.

Hat man AD gefunden, so hat man auch DB = AB — AD; man fälle von C den Perpendikel CG auf DB, so ist DG = GB nach §. 552. folglich GB = $\frac{1}{2}$DB. Man hat also im Dreyeck CBG, die Seite CB, BG und den rechten Winkel bey G; woraus man GCB und B findet nach §. 757. Eben so hat man im △ACG die Seiten AC, AG = AD + DG, und den rechten Winkel bey G, woraus man ACG und A findet nach §. 757. folglich werden durch diese Reduction alle Winkel gefunden.

Anwendung der trigonometrischen Lehrsätze auf die Polygone.

§. 762. **Lehrsätze.** Die Seite eines regulären Vielecks läßt sich aus dem Winkel am Mittelpunkt durch Rechnung trigonometrisch bestimmen.

Sie ist nemlich *Fig.* 67. $\frac{2AC \cdot \text{sin. } \frac{1}{2}ACB}{r}$; oder

wenn AC = a, ACB = v, und AB = b; so ist

$b = \frac{2a \cdot \text{sin. } \frac{1}{2}v}{r}$.

Bew.

Bew.

Man theile AB durch den Perpendikel CG in zween gleiche Theile, so ist AG=GA, und bey G rechte Winkel, Δ. ACG = BCG; folglich der Winkel bey C in zween gleiche Theile getheilt; dahero

$r : AC = \sin. \frac{1}{2}ACB : AG.$ d. i. in Buchstaben

$$r : a = \sin. \frac{1}{2}v : \frac{a \cdot \sin. \frac{1}{2}v}{r} = AG.$$

$$\frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2}v}{r} = 2AG.$$

$$2AG = AB$$

$$\frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2}v}{r} = AB = b.$$

§. 763. Zusatz. Aus dem Ausdruck für b, läßt sich a oder der Radius des Polygons finden; denn weil $\frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2}v}{r} = b$ so ist

$$2a \cdot \sin. \frac{1}{2}v = rb$$

$$: 2 \sin. \frac{1}{2}v.$$

$$a = \frac{rb}{2 \sin. \frac{1}{2}v.}$$

Das Product des Sinus totus in die Seite des Polygons dividirt durch den doppelten Sinus des halben Centriwinkels ist der Radius des Polygons.

§. 764. Lehrsatz. Eines jeden regulären Vielecks Fläche läßt sich trigonometrisch berechnen, und ist, wenn die Anzahl der Centriwinkel n ist,

$$\frac{n \cdot r \cdot \sin. v}{2}$$

Beweis.

Es bleibe alles wie vorhin, und das Perpendikel CG heisse e; so ist

nr. I. $\sin. tot. : AC = \sin. CAG : CG.$ aber $\sin. CAG = \cos. ACG.$

$\sin. tot. : AC = \cos. ACG : CG$ d. i. in Buchst.

$$r : a = \cos. \tfrac{1}{2}v : CG = \frac{a \,.\, \cos. \frac{1}{2}v}{r} = e.$$

nr. II. $\triangle ACB = \frac{AB \,.\, CG}{2}$ nach §. 516.

das ist, in Buchstaben $= \frac{be}{2}$

und im Wehrt von e nach nr. I. $= \frac{ba \,.\, \cos. \frac{1}{2}v}{2r}$

u. im Wehrt von b nach §. 762. $= \frac{2a \sin. \frac{1}{2}v \,.\, a \,.\, \cos. \frac{1}{2}v}{2 \,.\, rr}$

aufgehoben was sich aufheb. läßt

und schicklicher ausgedruckt $= \frac{a^2 \sin. \frac{1}{2}v \,.\, \cos. \frac{1}{2}v}{rr}$

Es ist aber $\frac{2 \sin. \frac{1}{2}v \,.\, \cos. \frac{1}{2}v}{r} = \sin. v$ nach §. 734.

folgl. subst. $\frac{a^2 \sin. v}{2r} = \frac{be}{2}$, ist nun $r = a$, so ist

$\frac{r \,.\, \sin. v}{2} = \frac{be.}{2}$ und die ganze Fläche

des Polygons $\frac{nr \,.\, \sin. v}{2} = \frac{nbe.}{2}$

§. 765. Zusatz. Es sey ein anders Vieleck von N Seiten; und dessen Centriwinkel $= V$, so ist seine Fläche $= \frac{N \,.\, r \,.\, \sin. V.}{2}$ man heisse die Fläche Q, und die vorige q; so ist

$$Q : q = \frac{Nr \sin. V}{2} : \frac{nr \sin. v}{2}$$ das ist

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} : \frac{r}{2}$$

$Q : q = N \,.\, \sin. V : n - \sin. v.$

§. 766. **Zusatz.** Wenn $V = \frac{1}{2}v$; so ist nach §. 734. $\sin. v = \frac{2 \sin. V . \cos. V}{r}$; folglich in diesem Fall

$$q : Q = \frac{n . 2 \sin. V . \cos. V.}{r} : N . \sin. V.$$

$$q : Q = \frac{2n . \cos. V}{r} : N$$

$$q : Q = 2n . \cos. V : r . N.$$ aber in diesem Fall

$2n = N.$ nach §. 567.

$$q : Q = \cos. V : r.$$

Die Flächen zweyer Vielecke, davon das zweyte noch so viel Seiten als das erste hat, verhalten sich wie der Cos. vom Centriwinkel des Vielecks von mehreren Seiten zum Radius.

§. 767. Anm. Man siehet hieraus, daß man die Polygone durch Hülfe der Trigonometrie viel genauer berechnen kann, als durch die Geometrie; wir haben dahero die Lehre davon in der Geometrie aus diesem Grunde desto kürzer abhandeln dörfen.

Die Berechnung der Sinus und der Logarithme, nebst dem Gebrauch der Tafeln.

§. 768. **Lehrsatz.** Unter allen in den Tafeln berechneten trigonometrischen Linien sind nicht mehr als drey, welche sich genau durch Rechnung finden lassen, nemlich der Sinus totus, der Sinus von 30°, und die Tangente von 45°; die übrige alle sind nur beynahe wahr. Denn der Sinus totus ist der Radius, welcher 10000 Milliontheile, als so viele Einheiten enthält; der Sinus von 30° ist

der

der halbe Radius; folglich die Hälfte von den angenommenen Einheiten; und die Tangente von 45° ist dem Radius gleich. Der erste Satz ist klar, die zween leztere lassen sich erweisen.

I. Satz. *Fig.* 88. β.

sin. 30° = ½r.

Bew.

Es sey LMN = 60° so ist ΔLMN gleichseitig.
LMP = PMN = 30° u. auch die ΔΔ gl.

folglich LP = PN = ½LN = ½LM = ½r.
aber LP = sin. 30°

sin. 30° = ½r.

II. Satz. *Fig.* 89.

tang. 45° = r.

Bew.

Es sey BCA = 45° so ist BA = tang. 45°
also A = 90° folglich auch
CBA = 45° dahero
ΔCBA gleichschenklicht; und
CA = AB das ist
r = tang. 45°.

§. 769. **Zusatz.** Weil man die übrige Sinus nicht genau finden kann, so hat man den Radius in so viel millionen gleiche Theile getheilt, und die übrige Sinus, die alle kleiner nach §. 693. als Brüche von ihm angesehen, bey denen der Fehler nicht einmal ein Millionentheilgen beträgt, wenn man die obige Eintheilung annimmt; und diß ist ein auch bey ziemlich grosen Cirkeln kaum merklicher Fehler.

§. 770.

§. 770. Anm. Damit man sehe, wie man die Sinus und Cos. aus einem einigen Sinus finde, wollen wir die obige Formel §. 753. zu Grunde legen, als welche nach dem binomischen Lehrsatz: $\sin. nz = \frac{n}{1} \cdot (\cos. z)^{n-1} \sin. z - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ $(\cos. z)^{n-3} \sin. z^3 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\cos. z)^{n-5}$ $\sin. z^5 - \ldots) : r^{n-1}$, hingegen $\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$ $(\cos. z)^{n-2} (\sin. z)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\cos. z)^{n-4} (\sin. z)^4$ $- \ldots) r^{n-1}$; woraus sich folgende Rechnung ergibt, wenn $\sin. z = s$, $\cos. z = c$.

$\sin. z = s$	$\cos. z = c.$
$\sin. 2z = 2cs : r$	$\cos. 2z = (cc - ss) : r$
$\sin. 3z = (3ccs - s^3) : rr$	$\cos. 3z = (c^3 - 3css) : r^2$
$\sin. 4z = (4c^3s - 4cs^3) : r^3$	$\cos. 4z = (c^4 - 6ccss + s^4) : r^3$
$\sin. 5z = (5c^3s - 10ccs^4 + s^5) : r^4$	$\cos. 5z = (c^5 - 10c^3ss + 5cs^4) : r^4$
$\sin. 6z = 6c^3s - 20c^3s^3 + 6cs^5) : rs^5$	u. s. w.

Wodurch begreiflich wird, wie die Sinus und andere trigonometrische Linien berechnet werden können.

§. 771. Anm. Weil *Fig.* 88. β. die Sehne $LN = 2LP = 2 \sin. \frac{1}{2}u$; so kann man die Sehnen aller Winkel von zwey zu zwey Graden oder Minuten für einen gegebenen Radius finden; wodurch der sogenannte geradlinigte Transporteur entsteht, auf welchen man gemeiniglich die Sehnen nur von 5 zu 5 Graden trägt, und die dazwischen fallende wie bey dem verjüngten Maasstab beynahe zu bestimmen sucht. Diß gehört aber zur practischen Trigonometrie.

§. 772. **Lehrsatz.** Unter allen trigonometrischen Zahlen sind der Sinus totus, und sein Logarithmus, der Sinus von 30°, die Tangente von 45° und ihr Logarithmus, nebst den Logarithmen der Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000; so weit sie berechnet sind, in den Tafeln genau, die übrige alle aber nur beynahe wahr. Von den ersten drey Zahlen erhellet der Beweis aus §. 768. denn der Logarithme des Sinus totus und der Tangente von 45

sind

sind einerley; und der Sin. 30 ist der halbe Radius; sein Logarithmus ist schon irrational. Von den folgenden aber ergibt sich der Beweis aus der in den Tafeln angenommenen Progreßion, 1, 10, 100, 1000, u. s. w. und den Logarithmen 0, 1, 2, 3, u. s. w. mit den angehängten Nullen wegen den Decimalfractionen.

§. 773. **Zusatz.** Wie man die dazwischen fallende Logarithmen finde, haben wir allgemein §. 309. erkläret, und können uns darauf berufen.

§. 774. **Zusatz.** Der Logarithme des Sin. 0 wird unrichtig in den Tabellen = 0 gesetzt. Denn wenn dieser Logarithme null wäre, so müßte der Sinus von 0 Grad = 1 seyn; nach §. 301. Er ist aber nicht 1, sonst wäre $0° = 90°$, welches widersinnisch ist. Folglich wird dieser Logarithme in den Tafeln unrichtig angegeben.

§. 775. **Anm.** Was den Gebrauch der Tafeln betrifft, so stehen alle Bogen, welche zusammen 90° betragen, beysammen, z. E. sie fangen an auf der ersten Columne 0°, und gerade gegenüber in der andern Columne 89° 60′, das gibt zusammen 90°, und mit 45° hören sie auf; nemlich auf der einen Seite 44° 60′ auf der andern 45° 0′ weil 44° 60′ + 45° 0′ gerade 90° betragen. Also machen durchgehends zwey gegenüber stehende Bogen in Graden zusammen 90°. Diese Ordnung, daß die Bogen unter 45° und ihre Complemente oder Ergänzungen zu 90° beysammen stehen, hat viele Bequemlichkeit: denn der Sinus des gegenüber stehenden Bogens ist der Cosinus des ersten, und umgekehrt, und die dabey stehende Logarithme sind also wechselsweise die Logarithme der Sinus und der Cosinus. Eben das gilt von Tangenten und Cotangenten. Nach den logarithmischen Tafeln der Sinus und der Tangenten folgen die Logarithmen der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen, die man braucht, wenn man eine gerade Linie in Zahlen gegeben, in die Rechnung bringt. Bey diesen Logarithmen kann man den Vortheil gebrauchen, daß man, wenn eine Linie gesucht wird, und man sie anfänglich in Schuhen gefunden hätte, es bliebe aber noch etwas übrig, und der Logarithme correspondirte der gefundenen Zahl nicht genau, diesen nemlichen Logarithmen unter der un-

mittelbar folgenden Characteristik, die das Zehnfache der vorigen ist, aufsuche; da denn die correspondirende Zahl der natürlichen Zahlzeichen geometrische Zolle geben wird, weil ein geometrischer Schuh mit 10 multiplicirt, so viel geometrische Zolle gibt; correspondirt die Zahl noch nicht genau, so sucht man sie in der folgenden Characteristik, und bekommt Linien. In diesem Fall aber ist es gut, wenn man Tafeln hat, wo die Logarithme für die natürliche Zahlen bis auf Millionen berechnet sind, damit man desto mehr Characteristike bekomme; wie in der Trigonometria Britannica. Unerachtet diß mehr in die practische Rechnungen gehöret, so wollen wir doch ein Exempel geben. Es sey *Fig.* 90. die Linie AC gegeben in Schuhen, und zwar = 18'; der Winkel A sey 30°, und B sey 80°. Man suche BC, so ist

$$\text{sin. B} : \text{AC} = \text{sin. A} : \text{BC} \text{ oder im Wehrt}$$

$$\text{sin. } 30^\circ : 18' = \text{sin. } 80^\circ : \text{BC} = \frac{18' \cdot \text{sin. } 80^\circ}{\text{sin. } 30}$$

Wenn man nun dieses logarithmisch berechnet, so erinnert man sich, daß durch die Logarithme die Multiplication in eine Addition, und die Division in eine Subtraction verwandelt werden. Dem zu Folge addirt man die Logarithmen von 18' und 80° zusammen, und subtrahirt von der Summe den Logar. von 30°. Man sucht sie also in den Tafeln auf, und zwar den ersten in den Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen, die andere in den Tafeln der Sinuum. u. s. w.

Log. 16 = 1, 2041200
Log. sin. 80° = 9, 9933515
Summe = 11, 1.9.7.4715
Log. sin. 30° = 9, 6 98 9700
Log. BC = 1, 4 985015

oder die Differenz.

Diesen Logarithmen schlägt man in den Tafeln der natürlichen Zahlzeichen auf, weil BC eine Seite des geradelinigten Dreyecks ist; welchen am nächsten correspondirt, 31, das ist 31'; um aber die Sache genauer zu wissen, so sucht man diesen Logarithmen unter der Characteristik 2, da dann am nächsten correspondirt 315, das sind Zolle, also 31' 5''; und um die Sache noch genauer zu haben, so suche man ihn auch unter der Characteristik 3, deme 3152''' am nächsten kommen; also habe ich noch 2''', folglich ist BC = 31' 5'' 2'''. Wenn man weitere Characteristike hat, so kann man in Zehentheilgen einer Linie u. s. w. es noch genauer finden. Diß Exempel wird inzwischen hinlänglich seyn, eine Anleitung zum Gebrauch der Tafeln zu geben, bis wir in der practischen Geometrie das weitere vortragen werden.

Zweyn-

Zweytes Capitel,

Von der sphärischen Trigonometrie.

§. 776.

Erklärung.

Die sphärische Trigonometrie lehret, aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks die drey andere durch Rechnung zu finden; die drey Stücke mögen Seiten oder Winkel, oder theils Seiten theils Winkel seyn.

§. 777. **Zusatz.** Der Grund, warum in der sphärischen Trigonometrie diese Erklärung gegeben wird, beruhet darauf, daß die sphärische Dreyecke lauter Bögen grösster Cirkel sind; folglich würde ein jeder Parallelkreiß mit der Grundseite eines sphärischen Dreyecks, zwar ein anderes ähnliches Dreyeck bestimmen, aber das hiesse kein sphärisches Dreyeck von der Art, wie sie allein in der Astronomie betrachtet werden.

§. 778. **Anm.** Ausser dem, was wir in der allgemeinen Geschichte der Trigonometrie §. 678. folgg. vorgetragen, melden wir noch, daß die sphärische Trigonometrie von Hrn. Freyh. von Wolf in seinen Elementis sehr ausführlich und vollständig, und weit genauer als einige andere Wissenschaften in diesem Werk abgehandelt worden. Wie er dann auch eine kurze Regel, die noch allgemeiner ist als die alte Neperische, und nur für rechtwinklichte Dreyecke taugliche Regel war, zu Auflösung aller sphärischen Dreyecke gefunden, und in gedachten Elementis demonstrirt hat. Unter den neuern hat besonders Herr Prof. Kies in einer academischen Dissertation 1758. diese Lehre so ausführlich als gründlich vorgetragen.

Allgemeine Betrachtung der sphärischen Dreyecke.

§. 779. Erklär. Wenn drey gröβte Cirkel einander schneiden, so entstehen durch die Durchschnittspunkte Bögen, welche die Seiten des sphärischen Dreyecks sind, und die Durchschnittspunkte bestimmen seine Winkel. Die Cirkel aber können nach §. 661. einander schneiden, daß jede Seite kleiner als 180° wird, von solchen Dreyecken ist hier die Rede. Nemlich ein sphärisches Dreyeck, wie es hier betrachtet wird, bestehet erstlich aus lauter Bogen gröβter Cirkel; zweytens aus solchen Bogen, deren jeder kleiner als 180 oder ein halber Cirkel ist.

§. 780. Zusatz. Dahero gibt es in Rücksicht auf die Sinus und Tangenten der Seiten nicht weitere Fälle der Zweydeutigkeit, als zween; da nemlich Sinus und Tangente zweyerley Bögen correspondiren können; sie würden aber mehrern correspondiren, wenn man Seiten annähme, die auch gröser als 180° seyn könnten.

§. 781. Erklär. Ein sphärisches Dreyeck ist entweder rechtwinklicht oder schiefwinklicht: **rechtwinklicht** heißt es, wenn es einen oder auch mehrere rechte Winkel hat, nach §. 674. **schiefwinklicht**, wenn alle drey schief sind, und keiner davon ein rechter ist.

§. 782. Erklär. In einem rechtwinklichten Dreyeck, wo ein rechter Winkel ist, heissen die Seiten, welche der rechte Winkel einschleußt, die zween Perpeudikel, oder die eine ist der Perpendikel,

und

und die andere die Grundlinie; die Seite, die dem rechten Winkel entgegen steht, heißt die Hypothenuse.

§. 783. **Lehrsatz.** Wenn man von den Durchschnittspunkten der Bögen eines sphärischen Dreyecks gerade Linien oder Radios nach dem Mittelpunkt der Kugel ziehet, so sind die Seiten des sphärischen Dreyecks die Maase der Winkel an dem Mittelpunkt der Kugel. *Fig.* 96. ist das Dreyeck PAB gegeben, man suche den Mittelpunkt der Kugel K, und ziehe die Linien PK, BK, AK, so entstehen schon die Winkel PKB = PB, PKA = PA, BKA = BA. Nach geometrischen Gründen §. 476.

§. 784. **Lehrs.** Wenn man von P auf den Durchschnitt der zwo Flächen, nemlich auf die Linie KB die Linie PN perpendicular ziehet, und eben so PM auf KA perpendicular, so ist, wenn man M und N durch die Linie MN vereinigt, der Winkel PNM der Neigungswinkel beeder Ebenen, und dem sphärischen Winkel B oder PBA gleich. Denn daß er der Neigungswinkel sey, erhellt aus §. 598. welchen Lehrsatz wir besonders zu merken empfohlen, auch deutlich erwiesen haben; daß er aber dem Winkel B gleich, erhellt daher, weil die Fläche PKB sich in B gegen die Fläche KBA eben so neiget, wie sie sich in N neiget; oder weil durch die ganze Linie KB der Neigungswinkel unverrückt bleibt; die Neigung aber dieser zwo Flächen ist der sphärische Winkel B.

§. 785. **Zusatz.** Eben so ist PMN dem Winkel A, und NPM dem Winkel P gleich.

§. 786. Anm. Wenn man von Pappendeckel eine solche Kugel-Pyramide wie KPAB zusammen leimet, und in die Oeffnung ein hineinpassendes rechtwinklichtes Dreyeck wie PMN hinein schiebt, so wird der obige Lehrsatz so palpabel als der §. 598. den wir auf eine ähnliche Art erläutert haben.

§. 787. Zusatz. Man kann die gerade Linien PN und PM als die Sinus der Bögen PB und PA ansehen; denn PN steht auf AB, und PM auf KA perpendicular; aber KA und KB sind die Radii der Kugel; folglich ist nach der Erklärung §. 685. PN = sin. PB, und PM = sin. PA.

Betrachtung und Auflösung der rechtwinklichten sphärischen Dreyecke.

§. 788. Lehrsatz. Wenn der Sinus totus = r, so ist nach *Fig.* 96.

r : sin. BP = sin. B : sin. PA.

Bew.

PN : PM = r : sin. PNM §. 726.

PNM = B

PN : PM = r : sin. B.

PN : PM = sin. BP : sin. PA: §. 787.

r : sin. B = sin. BP : sin. PA

r : sin. BP = sin. B : sin. PA.

§. 789. Lehrsatz. Unter den vorigen Umständen ist wiederum, wenn t die Tangente bedeutet

r : sin. BA = t. B : t. AP.

Bew.

MP : MN = tang. N : r nach §. 759.

N = B nach §. 784.

MP

MP : MN = tang. B : r
KM : MP = r : tang. PA. nach §. 759.

KM : MN = tang. B : tang. PA. §. 278. nr. III.
KM : MN = r : sin. BA

r : sin. BA = tang. B : tang. PA.

§. 790. **Lehrsatz.** Wie man *Fig.* 97. BP bis N und BA bis M verlängert, daß BN und BM Quadranten oder 90° werden, eben so verlängere man PA bis D, daß DA = 90, und ziehe von D durch N und M den Bogen DM, so sind bey M und N rechte Winkel, und D ist der Pol von BAM; folglich

PN Complementum von BP
AM Complementum von AB
PD Complementum von PA;

ferner NM das Maas des Winkels B,
ND Complementum NM

also

ND Complem. des Maases von B.

Eben das gilt von den Tangenten und Cotangenten, wie es aus §. 699. erhellet.

§. 791. **Lehrsatz.** Zween sphärische Verticalwinkel sind einander gleich.

Satz. *Fig.* 97.

BPA = DPN.

Bew.

BPA + BPD = 180°
BPD + DPN = 180°

BPA + BPD = BPD + DPN
BPD = BPD subtr.

BPA = DPN.

§. 792. Lehrsatz. r : cos. PA = cos. BA : cos. BP.

Bew.

r : sin. DP = sin. D : sin. PN
sin. DP = cos. PA ; sin. D = cos. BA ; sin. PN = cos. BP.

---

r : cos. PA = cos. BA : cos. BP.

§. 793. Lehrs. r : cos. PA = sin. P : cos. B.

Bew.

r : sin. DP = sin. P : sin. DN.
sin. DP = cos. PA ; sin. DN = cos. B.

---

r : cos. PA = sin. P : cos. B.

§. 794. Lehrs. r : cos. B = cot. BA : cot. BP.

Bew.

r : sin. DN = tang. D : tang. PN. §. 789.
sin. DN = cos. B.

---

r : cos. B = tang. D : tang. PN
tang. D = cot. BA, t. PN = cot. BP.

---

r : cos. B = cot. BA : cot. BP.

§. 795. Lehrs. r : cos. BP = tang. P : cot. B.

Bew.

r : sin. PN = tang. P : tang. DN §. 789.
sin. PN = cos. BP

---

r : cos. BP = tang. P : tang. DN
tang. DN = cot. B

---

r : cos. BP = tang. P : cot. B.

§. 796. Lehrs. r : sin. BA = cot. AP : cot. B.

Bew.

Bew.

r : sin. BA = tang. B : tang. AP §. 789.

tang. B : tang. AP = cot. AP : cot. B

---

r : sin. BA = cot. AP : cot. B.

§. 797. Lehrs. r : cos. B = tang. BP : t. BA.

Bew.

r : cos. B = cot. BA : cot. BP

cot. BA : cot. BP = t. BP : t. BA. §. 720.

---

r : cos. B = tang. BP : tang. BA.

§. 798. Lehrs. r : cos. BP = t. B : cot. P.

Bew.

r : cos. BP = t. P : cot. B.

t. P : cot. B = t. B : cot. P.

---

r : cos. BP = tang. B : cot. P.

§. 799. Lehrs. r : cot. BP = t. BA : cos. B.

Bew.

r : t. BP = cos. B : t. BA

$$\text{t. BP} = \frac{r^2}{\cos . BP}$$ nach §. 720. substituirt gibt

$$r : \frac{r^2}{\cos . BP} = \cos . B : t . BA .$$

$$\frac{\quad\quad}{r : \cot . BP} \cdot \cot . BP$$

$$\frac{\quad\quad\quad}{r : \cot . BP : r^2} = \cos . B : t . BA .$$

$$\frac{\quad\quad\quad\quad}{\cot . BP : r} : r$$

$$\frac{\quad\quad\quad\quad}{\cot . BP : r = \cos . B : t . BA}$$ und invertendo

---

r : cot. BP = t. BA : cos. B.

§. 800. Zusatz. Eben so ist r : cot. B = t. AP : sin. AB, weil cot. AP $= \frac{r^2}{\text{t. AP}}$ §. 720. und durch diese Substitution die Proportion aus §. 769. folget.

§. 801. **Zusatz.** Auf gleiche Weise ist auch $r : \cot. P = \cot. B : \cos. BP$; weil $\text{tang. } B = \frac{r^2}{\cot. B}$ und die Proportion aus §. 798. durch die Substitution daselbst folgt.

§. 802. **Anm.** Dieses sind alle Fälle, die bey rechtwinklichten sphärischen Dreyecken vorkommen; Es sind in allem zwölf Proportionen, davon die 6 erste die Hauptproportionen sind, woraus sich alle Fragen auflösen lassen, und die 6 letztere Proportionen sind nur Folgen und schicklichere Ausdrücke. Um die Proportionen sogleich zu übersehen, wollen wir sie hersetzen:

I. $r : \sin. BP = \sin. B : \sin. PA.$
II. $r : \sin. BA = t. B : t. AP.$
III. $r : \cos. PA = \cos. BA : \cos. BP.$
IV. $r : \cos. PA = \sin. P : \cos. B.$
V. $r : \cos. B = \cot. BA : \cot. BP.$
VI. $r : \cos. BP = t. P : \cot. B.$

Die daraus fliessende sechs folgende sind

1. $r : \sin. BA = \cot. AP : \cot. B.$
2. $r : \cos. B = t. BP : t. BA.$
3. $r : \cos. BP = t. B : \cot. P.$
4. $r : \cos. BP = t. BA : \cos. B.$
5. $r : \cot. B = t. AP : \sin. AB.$
6. $r : \cot. P = \cot. B : \cos. BP.$

Allein die erste sechs sind die Fundamentalproportionen, die man sowohl hier, als bey den schiefwinklichten Dreyecken zu wissen nöthig hat, wenn man gründlich die Sache lernen will.

Betrachtung der Fälle, in welchen Winkel und Seiten gröser oder kleiner als 90 Grade werden.

§. 803. **Lehrs.** Sind in einem sphärischen Dreyeck einige Seiten kleiner, einige gröser als 90° oder ein Quadrant, so sind zwar alle Sinus positiv, aber die Cosinus und die Tangenten der grössern Bogen negativ. Denn daß die Sinus alle positiv

sitiv seyen, ist aus §. 695. verglichen mit §. 689. klar; weil nemlich jede Seite des sphärischen Dreyecks $< 180°$, und alle Sinus unter 180 positiv; daß aber die Cosinus der Bogen über 90° negativ werden, erhellet aus §. 704. weil der Cosinus von 90° $= 0$, folglich die Cosinus von grösern Bögen das Zeichen **minus** haben. Eben das gilt von den Tangenten, §. 720. weil die Tangente von $90° = \infty$, folglich von da aus der Uebergang ins negative geschiehet.

§. 804. **Lehrs.** Nennet man ein Paar Winkel und Bogen, davon jeder weniger als 90°, oder jeder mehr als 90° hält, **gleichartig**, (homogeneos) ein anders Paar, davon der eine mehr der andere weniger als 90° hält, **ungleichartig**, (heterogeneos) so wird ein schiefer Winkel und das dem gegenüber stehende Perpendikel, das ist, die Seite die den rechten Winkel macht, allemal gleichartig seyn. Diß folgt aus §. 802. nr. II. das ist, aus der Proportion r : sin. BA = t. B : t. AP. Denn sin. BA ist allemal positiv, BA mag gröser oder kleiner als 90° seyn; §. 695. dahero wie t. B, so ist auch t. AP. Ist t. B negativ, so ist auch t. AP negativ; das ist, wenn $B > 90°$, so ist auch $AP > 90°$.

§. 805. **Lehrsatz.** Wenn beede Perpendikel BA, PA gleichartig sind, so ist die Hypothenuse $< 90°$; nach §. 802. nr. III. denn r . cos. BP kann nicht negativ seyn, wenn cos. BA . cos. PA positiv sind; diß Product aber ist allemal positiv, wenn beede Perpendikel BA und PA gleichartig sind, das ist, wenn beede + oder beede — haben. Folglich muß auch r . cos. BP positiv seyn. r ist allzeit positiv;

sitiv; also muß auch cos. BP positiv seyn. Ist aber diß, so muß BP < 90° seyn; denn nur diese Cosinus sind positiv.

§. 806. **Zusatz.** Wenn also die Perpendikel ungleichartig sind, so ist die Hypothenuse BP > 90.

§. 807. **Zus.** Ist die Hypothenuse < 90°, so sind die Perpendikel gleichartig; ist sie gröser, so sind sie ungleichartig.

§. 808. **Lehrs.** Die Hypothenuse ist kleiner als 90° wenn ein Winkel mit der anliegenden Seite gleichartig ist. Diß folgt aus §. 802. nr. V. wo r : cos. B = cot. BA : cot. BP. Ist nun B und BA gleichartig, so ist cos. B ∝ cot. BA ein positives Product; folglich ist es auch r ∝ cot. BP; r ist immer positiv; also muß auch cot. BP positiv seyn, oder das Zeichen + haben, sonst würde durch die Multiplication ein negatives Product herauskommen. Ist aber cot. BP positiv, so ist BP < 90°; denn die cot. über 90° sind negativ, und nur die unter 90° positiv.

§. 809. **Zusatz.** Sind also die zwey Glieder, nemlich B und BA, ungleichartig, so ist die Hypothenuse gröser als 90°; weil alsdann beederseits ein negatives Product herauskommt.

§. 810. **Lehrs.** Ein Winkel ist spitzig, wenn der andere mit der Hypothenuse gleichartig ist. Der Beweis folgt aus §. 802. nr. VI. wo r : cos. BP = t. P : cot. B. Denn wenn cos. BP ∝ t. P. ein positives Product ist, so ist es auch r ∝ cot. B; folgl. muß cot. B positiv seyn; ist aber dieses, so ist B < 90° nach §. 720.

§. 811.

§. 811. Zusatz. Der Winkl B ist also stumpf oder > 90°, wenn die Hypothenuse und der andere Winkel ungleichartig sind.

§. 812. Anm. Es sind einige Fälle, aber nur wenige ausgenommen, wo sich aus den Zeichen die Beschaffenheit der Bogen nicht bestimmen läßt, z. E. wenn lauter Sinus vorkommen, u. s. w. wo man, wie in der ebenen Geometrie, einem sagen muß, ob die Winkel stumpf oder spitzig seyen.

Betrachtung der schiefen Dreyecke.

§. 813. Erklär. Ein jedes schiefes Dreyeck läßt sich in zwey rechtwinklichte verwandeln, wenn man von einem nach Belieben angenommenen Winkel desselben auf die entgegengesetzte Seite, die man allenfalls verlängern darf, einen Perpendikel herabfällt, wie *Fig.* 99. 100. der Perpendikel l'A aus dem schiefwinklichten Dreyeck zwey rechtwinklichte macht.

§. 814. Zusatz. Schiefwinklichte Dreyecke lassen sich also auf rechtwinklichte reduciren, und nach den vorigen Lehrsätzen auflösen, wenn man noch zwey Stücke in jedem rechtwinklichten Dreyeck ausser dem rechten Winkel als gegeben erhält.

§. 815. Zusatz. Man erhält diese zwey Stücke allemal, wenn neben zwo Seiten ein Winkel gegeben ist; zween Fälle sind ausgenommen, wenn entweder drey Seiten oder drey Winkel gegeben sind, welche Fälle wir besonders betrachten werden.

§. 816. Zusatz. Wenn in einem schiefwinklichten Dreyeck einer Seite ein Quadrant ist, so läßt er sich, wenn man die andere Seite in einen Quadranten verlängert, ohne weitere Reduction, wie die rechtwinklichte Dreyecke auflösen.

§. 817. Lehrsatz. Es seyen gegeben *Fig.* 99. 100. die Winkel B, D und die Seite DP, man kann daraus die Seite BP und die übrige Stücke finden.

Satz. *Fig.* 99. 100.

sin. B : sin. D = sin. DP : sin. BP.

Bew.

Man fälle den Perpendikel PA auf BD herab, so ist

r : sin. B = sin. BP : sin. PA
r : sin. D = sin. DP : sin. PA } §. 802. nr. I.

sin. B : sin. D = sin. DP : sin. BP nach §. 278.

§. 818. Lehrs. t. B : t. D = sin. DA : sin. BA.

Bew.

r : tang. B = sin. BA : t. PA
r : tang. D = sin. DA : t. PA } §. 802. nr. II.

tang. B : tang. D = sin. DA : sin. BA. §. 278.

§. 819. Lehrs. cos. BP : cos. BA = cos. DP : cos. DA.

Bew.

cos. PA : r = cos. BP : cos. BA
cos. PA : r = cos. DP : cos. DA. } §. 802. nr. III.

cos. BP : cos. BA = cos. DP : cos. DA.

§. 820. Lehrs. sin. BPA : cos. B = sin. DPA : cos. PDA.

Bew.

r : cos. PA = sin. BPA : cos. B
r : cos. PA = sin. DPA : cos. PDA } §. 802. nr. IV.

sin. BPA : cos. B = sin. DPA : cos. PDA.

§. 821.

§. 821. **Lehrsatz.** cos. BPA : cos. DPA = tang. DP : tang. BP.

Bew.

r : tang. BP = cos. BPA : t. PA
r : tang. DP = cos. DPA : t. PA
} §. 802. nr. II.

tang. DP : t. BP = cos. BPA : cos. DPA §. 278.
cos. BPA : cos. DPA = t. DP : t. BP.

§. 822. **Zusatz.** Wie man nun bey den rechtwinklichten Dreyecken gröstentheils finden kann, welche Winkel und Seiten gröser oder kleiner als 90°, das ist, stumpf oder spitzig seyen, so kann man es auch hier durch die Reduction finden; die ausführliche Bestimmung der Fälle selbst aber würde hier zu weitläuftig seyn. Uebrigens merken wir noch an, daß die Cosinus und Tangenten von den innern Winkeln der reducirten rechtwinklichten Dreyecke zu verstehen seyen; sonst würde man aus den Zeichen nichts bestimmtes schliesen können.

Betrachtung und Auflösung der schiefen Dreyecke, in welchen drey Seiten oder drey Winkel gegeben sind.

§. 823. **Lehrsatz.** Wenn man *Fig.* 98. in dem sphärischen schiefen Dreyeck, wo die Seiten PB, PA, AB gegeben sind, die Figur nach §. 783. zurichtet, die Sinus PQ, PN ziehet, auf die Ebene KAB einen Perpendikel PM herab läßt, von M nach N die Linie MN ziehet, so ist MN auf KB der Durchschnitt der beeden Ebenen KPB, KBA perpendicular, wie aus §. 598. deutlich erhellet; auch aus

Char-

Chartenpapier, wie wir im angeführten Lehrsatz zeigten, leicht gewiesen werden kann; ziehet man von N nach Q die Linie NQ, so kann man in dem ebenen Dreyeck NQK die Seite NQ aus dem Winkel NKQ und beeden Seiten NK, KQ nach §. 755. finden, sie ist nemlich $\sqrt{(KN^2 + KQ^2 + 2KN \times KQ. \cos. NKQ)}$; welches aus der §. 755. gefundenen Formel $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\pi)}$ klar genug ist, wenn man für die Buchstaben die hier vorkommende Seiten setzet. Ziehet man noch die Linie QM, so wird sich auch diese finden lassen, denn es wird der Winkel PMQ ein rechter seyn, weil PM auf die ganze Ebene KAB perpendicular stehet, folglich alle gerade Linien durch M in dieser Ebene mit PM rechte Winkel machen. §. 598. Demnach ist PQ im rechtwinklichten Dreyeck PMQ die Hypothenuse, und $PQ^2 = PM^2 + QM^2$, folglich $QM^2 = PQ^2 - PM^2$. Dieses vorausgesetzt, wird sich der Winkel B oder PBA durch Rechnung finden lassen, wenn man, um kürzer sich ausdrucken zu können, den schon gemeldten Linien ihre Namen von kleinern Buchstaben gibt. Es seye

der Radius KP = 1.
der sin. PB = PN = m.
cos. PB = KN = μ.
sin. PA = PQ = p.
cos. PA = KQ = π.

Endlich heissen die in der Figur durch Linien nicht ausgedruckte Sinus und Cos. von AB, f und φ, nemlich sin. NKQ = sin. AB = f; cos. AB = φ: so ist nach dem schon genannten Lehrsatz §. 755. wenn man für die Linien Buchstaben setzt:

nr. I. $NQ = \sqrt{(\mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\varphi.)}$

oder $NQ^2 = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\varphi.$

weil ferner:

$QN : KQ = \text{sin. } NKQ : \text{sin. } KNQ$ §. 726.

$\text{sin. } NKQ = \text{sin. } AB.$

$QN : KQ = \text{sin. } AB : \text{sin. } KNQ$ in Buchst.

$QN : \pi = f : \frac{\pi f}{QN} = \text{sin. } KNQ.$

aber $\text{sin. } KNQ = \text{cos. } MNQ$; weil $MNK = 90°$ 598

folgl. $\frac{\pi f}{QN} = \text{cos. } MNQ$ folgl. ist im $\triangle QNM$ aus den Seiten QN, NM, und dem cos. MNQ nach §. 726. wie nr. I. NQ^2, also auch hier

nr. II. $QM^2 = QN^2 + NM^2 - \frac{2\pi f . NM . QN}{QN}$ oder aufgehoben mit QN

$QM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f . NM$

Es ist ferner, wenn sin. B, oder $\text{sin. } PBA = X$ und der sin. tot. $= 1$ gesetzt wird,

$PN : 1 = PM : \text{sin. } PNM$

$PNM = PBA = B$ §. 784.

$PN : 1 = PM : \text{sin. } B.$ das ist in Buchstaben

$m : 1 = PM : \text{sin. } B = \frac{PM}{m}$ also

$\text{sin. } B = \frac{PM}{m}$

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} . m$

$m . \text{sin. } B = PM.$

$\text{sin. } B = x$ nach der Voraussetzung

---

nr. III. $mx = PM.$ Da nun ferner

$NM^2 = PN^2 - PM^2$ so ist in Buchstaben und Ausdruck nr. III.

$NM^2 = m^2 - m^2x^2 = m^2(1 - x^2)$ folgl.

$NM = m\sqrt{(1 - x^2)}$

weil ferner

$QM^2 = PQ^2 - PM^2$ weil $PMQ = 90^\circ$;

$QM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f.NM$ nach nr. II.

so ist

$PQ^2 - PM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f.NM.$

nr. IV. d. i. in Buchst. u. Ausdr. nach nr. III.

$p^2 - m^2x^2 = QN^2 + m^2 - m^2x^2 - 2\pi fm\sqrt{(1-x^2)}$

$m^2x^2 = m^2x^2$ add.

$p^2 = QN^2 + m^2 - 2\pi fm\sqrt{(1-x^2)}$

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} = 2\pi fm\sqrt{(1-x^2)}$ add.

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} + p^2 = QN^2 + m^2$

$p^2 = p^2$ subtr.

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} = QN^2 + m^2 - p^2$

$QN^2 = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\Phi$ nr. I.

subst.

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\Phi + m^2 - p^2$

$m^2 - p^2 + \mu\mu = m^2 - p^2 + \mu\mu$ subtr.

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} - (m^2 - p^2 + \mu\mu) = \pi\pi - 2\pi\mu\Phi.$

$: \pi$

$2fm\sqrt{(1-x^2)} - \left(\frac{m^2 - p^2 + \mu\mu}{\pi}\right) = \pi - 2\mu\Phi.$

$: 2fm$

$\sqrt{(1-x^2)} - \left(\frac{m^2 - p^2 + \mu\mu}{2\pi fm}\right) = \frac{\pi - 2\mu\Phi}{2fm}$

folgl. herübergesetzt

$\sqrt{(1-x^2)}$

$$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2\text{tin}} + \left(\frac{m^2 - p^2 + \mu\mu}{2\pi\text{fin}}\right)$$

aber $m^2 + \mu^2 = 1$ nach §. 700.

folgl. substit.

nr. V. $\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2\text{fm}} + \frac{1-p^2}{2\pi\text{fm}}$

$1-p^2 = \pi^2$ §. 700. folgl.

$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2\text{fm}} + \frac{\pi^2}{2\pi\text{fm}}$ und π gegen π aufgehoben,

$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2\text{fm}} + \frac{\pi}{2\text{fm}}$ u. wenn man wirkl. add. $\pi + \pi$, weil die Benennung einerley

$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{2\pi - 2\mu\varphi}{2\text{fin}}$ und durch 2 aufgehoben

$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi - \mu\varphi}{\text{fin}}$

Es sey ferner $y = \text{sin.}\frac{1}{2}B$, oder $\text{sin.}\frac{1}{2}\text{PBA}$

Es ist aber wenn $r = 1$,

$y^2 = \frac{1 - \cos.x}{2}$ nach §. 735. aber

$\cos.x = \sqrt{(1-x^2)}$ nach §. 700.

folgl. $y^2 = \frac{1 - \sqrt{(1-x^2)}}{2}$

nr. VI. $y^2 = \frac{1 - \sqrt{(1-x^2)}}{2}$;

$\sqrt{1-x^2}; = \frac{\pi - \mu\varphi}{\text{fm}}$ nach nr. V.

$y^2 = \frac{1}{2} - \frac{(\pi - \mu\varphi)}{\text{fm}} = \frac{\text{fm} - (\pi - \mu\varphi)}{2\text{fm}}$ das ist

$$y^2 = \frac{fm - \pi + m\varphi}{2fm}$$ aber

$$fm + \mu\varphi = \cos.(BP - AB)$$ §. 748.

$$y^2 = \frac{\cos.(BP - AB) - \pi}{2fm}$$

$$\pi = \cos. AP$$

$$y^2 = \frac{\cos.(BP - AB) - \cos. AP}{2fm}$$ aber nach §. 737.

$$\frac{\cos.(BP - AB) - \cos. AP}{2} =$$

$$(\sin. \tfrac{1}{2}AP - \sin. \tfrac{1}{2}(BP - AB)(\sin. \tfrac{1}{2}AP + \sin. \tfrac{1}{2}BP - AB)$$

$$\text{also } y^2 = (\sin. \tfrac{1}{2}AP - \sin. \tfrac{1}{2}(BP - AB)(\sin. \tfrac{1}{2}AP + (BP - AB)$$

$$fm$$

$$\text{aber } fm = \sin.(BP . \sin. BA)$$

$$\text{fgl. } y^2 = (\sin. \tfrac{1}{2}AP - \sin. \tfrac{1}{2}(BP - AB)(\sin. \tfrac{1}{2}AP + \sin. \tfrac{1}{2}(BP - AB)$$

nr. VII. $\sin. BP . \sin. BA.$

Woraus die Proportion folget, wenn man den Radium, den man eins gesetzt, nach seiner Dimension ergänzet:

$$\sin. BP . \sin. BA : r^2 = \sin. \tfrac{1}{2}[AP + (BP - AD)] .$$
$$\sin. \tfrac{1}{2}[AP - (BP - AB)] : (\sin. \tfrac{1}{2}B)^2$$

weil $y^2 = (\sin. \tfrac{1}{2}B)^2$, woraus B gefunden wird.

§. 824. Anm. Wir haben diese Rechnung, die man für Kenner ungleich kürzer vortragen kann, mit Fleiß weitläuftig, und von Satz zu Satz ausgesuchet, weil Anfänger neben der Uebung zugleich eine Gelegenheit darinn bekommen, die ganze Trigonometrie dabey auf einmal zu wiederholen.

§. 825. **Zusatz.** Ist der Ausdruck $\pi - \mu\varphi$ negativ, so ist der Winkel B gröser als 90°, und kleiner, wenn $\pi - \mu\varphi$ eine positive Gröse in der Rechnung wird.

§. 826. **Zusatz.** Wenn in einem schiefen sphärischen Dreyeck die drey Winkel gegeben sind, so

kann

kann man es in ein anders verwandeln, in welchem die Seiten den Winkeln des ersten in einerley Ordnung und Lage correspondiren und gleich sind; wie man aus der Natur der sphärischen Dreyecke begreift, ohne daß man die weitläuftige Rechnung nöthig hätte. Durch diese Verwandlung also hat man den vorigen Lehrsatz wieder; da man die Seiten, die nun nach der Verwandlung Winkel worden sind, nach der vorigen Verhältniß findet.

§. 827. Anm. Diß ist das wichtigste, das von der sphärischen Trigonometrie zu wissen nöthig ist. Ausser dem Baron Neper hat der Baron Wolf eine eigene Regel erfunden, welche noch allgemeiner ist als die Neperische, weil sie sich nicht nur auf rechtwinklichte, sondern auch auf schiefwinklichte Dreyecke erstreckt. Er hat sie in seinen lateinischen Elem. Trig. sphær. §. 100. 108. 134. demonstrirt, und auch der Vorrede zu seinen logarithmischen Tafeln einverleibt: sie ist folgende für rechtwinklichte Dreyecke; wenn man sie logarithmisch ausdruckt: Sinus totus cum cosinu partis mediæ æquatur sinibus sejunctarum & cotangentibus conjunctarum; wo man wissen muß, was der mittlere und was die beede abgesonderte Theile sind. Man betrachtet nemlich im rechtwinklichten Dreyeck nur fünf Stücke, der rechte Winkel wird gar nicht geachtet; die fünf Stücke sind die drey Seiten und zween Winkel ausser dem rechten. Nun sind allemal zwey Stücke gegeben, das dritte sucht man; von welchen dreyen eines in der Mitte, die übrige zwey entweder unmittelbar daran liegend, oder durch zwey andere abgesondert sind. In einem Fall heissen diese zween Theile partes conjunctæ, im andern sejunctæ. z. E. *Fig.* 97. Es ist gegeben BP, BA, man sucht B, so ist B pars media; BP, BA sind conjunctæ; P und PA sind sejunctæ. Der rechte Winkel bey A wird für nichts geachtet. Die Regel für die schiefe Dreyecke, nachdem man den Perpendikel gefällt hat, ist folgende: pars media in primo triangulo cum extrema in secundo æqualis est parti mediæ in secundo cum extrema in primo. z. E. Im Dreyeck BPO *Fig.* 100. ist gegeben BP, BD, und der Winkel B; so sucht man nach gefälltem Perpendikel PA die Seite BA, und daraus AD. Man nimmt PA im Perpendikel als extremam partem in beeden Dreyecken an, so sind BA und AD mediæ, und B und D conjunctæ extremæ. Allein aus dieser Regel muß man doch für jeden Fall die besondere Proportion erst hersuchen; dahero andere für besser halten, eine kurze Tafel aller Fälle bey Handen zu haben, weil man doch bey solchen Rechnungen die Sinus-Tafeln haben muß, und es also nicht darauf ankommt, ob man eine Tabell weiter oder weniger hat. Man kann sie aus §. 802. leicht ordnen, wie folgende Tabell ausweiset.

BP; B; P;	D	r : cof BP = t B : cot BPA ſ BPA : ſ DPA = cof B : cof PDA	7
BP; B; P;	DP	r : cof BP = t B : cot BPA. cof DPA : cof BPA = t BP : t DP	8
BP; BD; B	DP	r : cof B = t BP : t BA cof BA : cof BP = cof DA : cof DP	9
BP; BD; B	D	r : cof B = t BP : t BA ſ DA : ſ BA = t PBA : t PDA	10
BP; BD; PD;	B	ſ BP . ſ BD : r^2 = $ſ\frac{1}{2}[PD + (BP - BD)] . ſ\frac{1}{2}[PD - (BP - BD)]$: $(ſ\frac{1}{2}B)^2$	11
B; P; D;	die Seiten	durch die Verwandlung	12

Gegeben	Gesucht	Es sey Proportionen	Fall
BP; PD; B	D	ſPD : ſB = ſBP : ſD	1
BP; B; D;	PD	ſD : ſBP = ſB : ſPD	2
BP; PD; B	BD	r : cosſB = tBP : tBA cosſBP : cosſBA = cosſDP : cosſDA	3
BP; PD; B	P	r : cosſBP = t B : cot. BPA tDP : tBP = cosſBPA : cosſDPA	4
BP; B; D;	P	r : cosſBP = tB : cot BPA cosſPBA : ſBPA = cosſPDA : ſDPA	5
BP; B; D;	BD	r : cosſB = tBP : tBA tPDA : tPBA = ſBA : ſDA	6

Drittes Hauptstück,

von der practischen Geometrie.

§. 828.

Erklärung.

Die practische Geometrie ist die Anwendung der bisher vorgetragenen sowohl geometrischen als trigonometrischen Lehrsätze auf die Ausmessung der wirklichen Ausdehnung, wie sie vornemlich auf der Oberfläche des Erdbodens vorhanden ist, durch Beyhülfe gewisser dazu dienlicher Instrumente.

§. 829. **Zusatz.** Sie unterscheidet sich also von der Euclideischen Geometrie dadurch, daß man so viel Instrumente hier gebrauchen darf, als man will, da hingegen **Euclides** nicht mehr als den Cirkel und das Lineal zu den geometrischen Auflösungen und Beweisen erlaubt hat.

§. 830. **Zusatz.** Eigentlich ist die practische Geometrie eine Anwendung auf alles, was sich ausmessen läßt; oder die ganze angewandte Mathematik. Man könnte sie auch in die himmlische oder oberirrdische, in die irrdische, und in die unterirrdische eintheilen. Die erste heißt die Astronomie, und ist eine eigene Wissenschaft der angewandten Mathematik; die zweyte, in sofern sie sich blos auf

die

die Oberfläche des Erdbodens bezieht, heißt die Feldmeßkunst; und die dritte die Markscheidekunst (Lat. Geometria subterranea) welche leztere man billig und mit eben so grosem Recht, als die angewandte Mathematik, vortragen sollte. Wir werden etwas davon sagen, wenn wir zuvor die Geschichte dieser Wissenschaft erzehlt haben werden.

Geschichte der practischen Geometrie.

§. 831. Wir haben in der Geschichte des ersten Hauptstücks schon gezeigt, daß die practische, aber anfänglich sehr ungekünstelte Geometrie, der theoretischen den Ursprung gegeben habe; es wird also vergönnt, das daselbst gesagte, in Rücksicht auf die älteste Zeiten, vorauszusetzen, und nur dasjenige, was die Geschichte der hiezu dienlichen Instrumente betrifft, hier zu ergänzen.

§. 832. Die vornehmste Instrumente ausser dem Cirkel und Lineal, sind der Transporteur, das Astrolabium, das Parallellineal, der Winkelhacken, der verjüngte Maasstab, das Meßtischlein, der geradelinigte Transporteur, der Proportionalcirkel, nebst einigen andern Gattungen von Cirkeln, und die zur unterirrdischen Geometrie gehörige Instrumente.

§. 833. Transporteur, Astrolabium und Winkelhacken sind sehr alte Instrumente, wie dann das Ptolemäische Astrolabium schon berühmt war; welches besonders zu Ausmessung des Himmels bestimmt war. Hingegen sind die folgende Instrumente ungleich neuer. Die älteste Nachricht vom verjüngten Maasstabe findet man bey dem Tycho von Brahe, welcher L. I. Epistolarum Astronom. p. 60. schreibt, er habe die Verfertigung dieses Maasstabs zu Leipzig, wo er studirt, im 17 Jahr seines Alters (1553) von dem damaligen Prof. der Mathematik Joh. Hommeln geler-

gelernet; wie solches auch Hr. Prof. Kästner anmerkt mathem. Anfangsgr. T. I. p. 232. Die Erfindung des Meßtischleins eignet Daniel Schwenter dem Prätorius zu, der vor ihm Prof. der Mathematik zu Altdorf war, in Geom. Pract. T. III. p. 637. Der geradelinigte Transporteur hat sein Daseyn den trigonometrischen Erfindungen zu danken; Herr Eberhard hat Verbesserungen dazu angegeben, in der Beschreibung einer neuen Meßtafel. 1753. Der Proportional-Cirkel ist eine Erfindung von dem schon genannten Jost Byrge, der bey dem Landgrafen Wilhelm zu Hessen-Cassel Mechanicus war. Levin. Hulsius gibt zuerst davon Nachricht, und eignet dem gedachten Byrge diese Erfindung zu, in dem Tractat von mechanischen Instrumenten. 1603. Byrge hat den Proportional-Cirkel in Gestalt eines gewöhnlichen Cirkels zuerst gemacht, daher er auch diesen Namen bekam; einige Jahr hernach hat Galiläus ihn verbessert, und anstatt der Cirkelfüsse zwey Linealien substituirt, und doch die Benennung des Proportional-Cirkels beybehalten; daher kam es, daß einige die Erfindung dieses nützlichen Instruments dem Galiläus zuschrieben; aber der erste Erfinder war der schon gemeldte Byrge, wie wir erwiesen; Galiläus hingegen hat die obige Verbesserungen angebracht, mit welchen man noch jezo die Proportional-Cirkel verfertiget; sie dienen fast alle arithmetische und geometrische Aufgaben mechanisch aufzulösen. Ausser diesen Cirkeln hat man auch noch dreyfüßige Cirkel, Taster-Cirkel, wodurch man den Diameter einer Kugel abmißt; u. s. w. von allen diesen Instrumenten wird ausführlich gehandelt in Leupolds Theatro Arithmet. Geometrico.

§. 834. Wir wollen noch was von der unterirrdischen Geometrie oder Markscheidekunst sagen. Diese Wissenschaft blieb bis aufs Jahr 1574. ein Geheimniß. In welchem Jahr Erasmus Rheinbold, ein Doctor der Arzneywissenschaft zu Saalfeld, einen kurzen und gründlichen Unterricht vom Markscheiden herausgab, damit, wie er in der Vorrede schreibt, hundert und noch mehr Gewerke nicht einem einzigen Markscheider allein ohne einigen Beweis, hinfüro glauben, sondern auch vor sich selbst die Wahrheit erfahren und die Probe anstellen können, ob die Gänge und Klüften richtig entschieden seyen. Dieses Werk wurde zu Frankfurt im Jahr 1616. wieder aufgelegt; blieb aber doch so unbekannt, daß im Jahr 1686. Nic. Voigtel bey der Ausgabe seiner Markscheidekunst vermeynte, er sey der erste, der hievon was geschrieben habe; welches auch andere Mathematikverständige damals glaubten, weil die Rheinboldische Bemühungen fast ganz in die Vergessenheit gekommen; inzwischen ist das Voigtelische Werk dem Rheinboldischen billig vorzuziehen. Im gegen-

genwärtigen Jahrhundert hat Hr. Prof. Weidler zu Wittenberg 1726. Institutiones Geometriæ subterraneæ in 4to nach mathematischer Lehrart herausgegeben; womit auch Beyers Markscheidekunst verglichen werden kann. Vor wenig Jahren hat Herr Rector Maier zu Carlsruh diese Lehre, so viel davon in ein Handbuch gehört, in seiner Einleitung zur practischen Geometrie vorgetragen. Wir werden am Beschluß was davon melden.

§. 835. Anm. Herr von Segner ließ die practische Geometrie in seinen Anfangsgründen ganz weg, weil man, um sie richtig zu verstehen, die Mechanik, Hydrostatik, Optik, u. s. w. voraussetzen müsse; Herr Hofr. Kästner hingegen trägt sie mitten in der Elementargeometrie vor; welches zwar, wie er selbst schreibt, wider die mathematische Methode geschiehet; allein um die Ungedult der Anfänger, welche sogleich nach der Anwendung fragen, zu stillen, und ihnen zu zeigen, daß sie noch mehr Theorie lernen müssen, trug er sie so bald vor. Ich gehe den mittlern Weg, und wollte sie weder ganz weglassen noch zu bald lehren, darum steht sie zwischen der Trigonometrie und höhern Geometrie; unerachtet sie übrigens noch später stehen sollte, so muß man den Lernenden hier was zu Gefallen thun, damit, wenn sie fragen, wozu diß oder jenes nutz sey, einigermassen geantwortet werde.

Die Vergleichung der vornehmsten Maase.

§. 836. **Willk. Satz.** Wenn man das geometrische Maas mit andern vergleichen will, so nimmt man den **Pariser Schuh** (Pied du Roi) zum allgemeinen Maasstab an, weil der Pariser Fuß unter den sonst gewöhnlichen und bekannten der größte ist.

§. 837. **Zusatz.** Wenn man den Pariser Fuß in 12″ und diese in zwölf Linien, und noch jede Linie in 10 Theile theilet, so hält der Pariser Fuß 1.12.12.10, das ist 1440 solche Theile; und diese Theilung ist wirklich eingeführt.

§. 838. Anm. In der practischen Geometrie hat man vornemlich den Pariser, den Rheinländischen und den Londner Fuß zu bemerken: den ersten als den größten und allgemeinen Maasstab; den zweyten, weil er nicht nur in ganz Teutschland, sondern auch in Dänemark eingeführt ist; den Londner, weil er in mathematischen, besonders astronomischen Rechnungen von englischen Scribenten gebraucht wird, wegen welcher Ursache man auch

den

den Pariser noch auffer den schon angeführten Gründen zu wissen nöthig hat. Wir wollen noch überdas auch den Wirtembergischen oder Stuttgartischen im ganzen Herzogthum eingeführten Schuh dazu in Betrachtung ziehen.

§. 839. **Lehrsatz.** Eine jede gegebene Länge läßt sich in blos geometrischen Längenmaasen ausdrucken, in welchen zehen Linien einen Zoll, zehen Zoll einen Schuh, zehen Schuh eine Ruthe machen. Denn wenn x das Decimalmaas und y das Duodecimalmaas bedeutet, so ist $10x = 12y$, oder zehen Decimalzoll machen zwölf Duodecimalzoll. Diß vorausgesetzt, gibt es folgende Rechnung:

$10x = 12y$

$\frac{}{}$:

$x = \frac{12}{10}y = 1,2..y.$ nach der Decimalrechn. §. 80. 81.

oder umgekehrt:

$12y = 10x$

$\frac{}{}$: 12

$y = \frac{10}{12}x = \frac{5}{6}x = 0,8333...$ nach §. cit.

§. 840. **Zusatz.** Ein Duodecimalzoll gibt also $\frac{5}{6}$ Decimalzoll; folglich kann man nach der Regel Detri jedes gegebene Maas reduciren; z. E. 7 Duodecimalzoll sind $7 . \frac{5}{6}$ Decimalzoll $= \frac{35}{6} = 5,833...$ §. 81.

§. 841. **Erklär.** Nach den willkührlich angenommenen Längen der Schuhe findet man, daß, wenn der Pariser 1440 gleiche Theile in sich halte,

der Rheinländische 1391
der Londnische 1350
der Stuttgartische 1268
der Nürnberger 1347. solcher Theile halte.

§. 842. **Lehrsatz.** Aus der gegebenen Verhältniß der Schuhe läßt sich eine in Schuhen oder Zollen gegebene Länge auf eine andere reduciren von

andern

andern gegebenen Schuhen oder Zollen. Denn es bedeute p die Parisische, r Rheinländische, w Würtemb. Schuh, so ist, wenn eine im Pariser Maas gegebene Länge n heißt, und solche Länge im gesuchten Rheinländischen x genannt wird, $np = xr$ folglich $x = \frac{np}{r}$, das ist logarithmisch $lx = ln + l(\frac{p}{r})$.

§. 843. Anm. Weil die meiste Reductionen auf der Verwandlung des Pariser Fusses in den Rheinländischen beruhen, so ist es gut, um nicht immer zu viel schreiben zu dörfen, den $l.\left(\frac{p}{r}\right)$ auf einmal zu suchen, er ist nemlich $lp - lr = l.\,14400 - l.\,13913 = 0,0149418$.

§. 844. Anm. Weil der Pariser Fuß gröser als der Rheinländische ist, und sechs Pariser Fuß eine Toise machen, so machen 2 Toisen auch mehr als 12′ Rheinl. oder eine Rheinländische Ruthe; und 180° Toisen sind um vierthalb Ruthen gröser als 90 Rheinl. Ruthen. Der Beweis davon ist folgender:

$6p = xr$ §. 842.

$\frac{6p}{r} = \frac{xr}{r}$

$6 \cdot \frac{p}{r} = x$. folglich

$l.\,6 + l.\left(\frac{p}{r}\right) = l.\,x$. Nun ist nach den Tabellen

$l.\,6 = 0,7781512$

$l\left(\frac{p}{r}\right) 0,0149418$

$lx = 0,7930930$ welchem in den Tafeln 6,2050 am nächsten kommt; wo man bey dem Aufschlagen die Regel, die §. 775. vorkommt, zu bemerken hat; man schlägt nemlich unter den Characteristiken 1, 2, 3, u. s. w. den Logarithmen auf, bis man ihn für Decimalbrüche so genau findet als es seyn kann. Folglich sind 6 Pariser Schuh oder eine Toise um $\frac{205}{1000}$ Tausendtheile eines Rheinl. Schuhes gröser als eine Rheinl. halbe Ruthe, oder 2 Tois. $= 2 \cdot 6,205 = 12,410 = 12,\frac{41}{100}$ Rheinl. Schuh. Diß mit 90 multipl. gibt $12 \cdot 90 + \frac{41 \cdot 90}{100} = 90$ Rheinl. Ruthen $+ \frac{3690}{100} = \frac{396}{10} = 36' \frac{9}{10} = 3° 9'$ Rheinl.

§. 845.

§. 845. Anm. Bey grosen Rechnungen kommen also merkliche Fehler heraus, wenn man eine Toise für eine halbe Rheinl. Ruthe hält; z. E. in der Militar-Baukunst; wo die französische Ingenieur, mit Vauban, 180 Toisen für die Seite des Polygons annehmen, und Sturm 2 Toisen auf eine Rheinl. Ruthe rechnet, in s. veritable Vauban, p. 101. folglich die Polygonseite um 3 Ruthen zu klein macht.

§. 846. **Zusatz.** Man kann nicht nur zwey, sondern verschiedene Maase nach der Kettenregel mit einander vergleichen. z. E. Man suche die Verhältniß des Wirtemb. Fusses zum Zellischen, wenn der Zeller zum Rheinl. ist wie 48 : 51.

z : r = 48 : 51.
r : p = 1391 : 1440.
p : w = 1440 : 1268.

z : w = 48 . 1391 . 1440 : 51 . 1440 : 1268.
oder kürzer = 48 . 1391 : 51 . 1268.
weil man beederseits mit 1448 dividiren kann, folglich auch oben r : w = 1391 : 1268 setzen darf. Wenn man die Logarithmen hier wieder braucht, so wird die Rechnung, besonders bey mehrern Factoribus, kürzer.

§. 847. Anm. Weitere Vergleichungen, besonders in Rucksicht auf das Wirtemb. Maas nach allen Gegenständen, die eines Maases fähig sind, findet man in dem Anhang zum kurzen doch gründl. Bericht vom Feldbau 1763. nr. 5. unter dem Titel: Vergleichung des Wirtembergischen Maases und Gewichtes mit andern. S. 52. von Herrn Prof. Sprenger in dem Herzogl. Wirtemb. Closter Maulbronn.

Die Messung und Verjüngung der Linien und Figuren.

§. 848. **Erklär.** Auf dem Felde bedient man sich der Stäbe oder Pfähle, welche in der gegebenen

Weite

Weite perpendicular abgesteckt, und auf dem Felde eben das sind, was auf dem Papier die Punkte, und die Meßketten oder Schnüre, welche von einem Stab zum andern reichen; die Schnüre aber müssen wohl zubereitet werden, damit sie durch die Verschiedenheit der Witterung keine Aenderung ihrer Länge leiden; weil aber dieses nicht wohl verhütet werden kann, so bedient man sich der Meßketten lieber. Einen Winkel auf dem Felde zu messen, hat man das Astrolabium oder Scheibeninstrument, das mit einem Fuß versehen ist, nöthig. Die Instrumente selbst lassen sich besser zeigen als weitläuftig beschreiben, welches um so weniger nöthig ist, als sie bekannt genug sind. Das Meßtischlein ist ein viereckigt Brett, darüber weiß Papier gespannt ist, es steht auf einem beweglichen Fuß, und kann mit Dioptern versehen werden.

§. 849. **Lehrsatz.** Eine Weite, das ist, eine Länge auf dem Felde, läßt sich messen: 1) wenn man von einem Endpunkt zum andern gehen kann, nach §. 408. 2) wenn man zu beeden Endpunkten von einem dritten Stand kommen kann, nach §. 425. 3) wenn man nur zu einem Endpunkt nicht aber zum andern kommen kann, nach §. 527. 4) wenn man die Endpunkte nur siehet, aber zu keinem kommen kann, nach §. 425. 527.

§. 850. **Erläuter.** Wir wollen die Fälle kürzlich erläutern.

I. Fall. Wenn man von einem Endpunkt zum andern gerade messen kann, so ist es natürlich, daß man die Meßstange nur so oft anschlagen darf, bis man den andern Punkt erreicht; folglich läßt sich die Weite geometrisch messen.

II. Fall. Wenn man zwar nicht von einem Endpunkt zum andern gerade zu messen, aber doch von einem dritten Stand,

wie

wie C *Fig.* 19. zu beeden Endpunkten A und D kommen kann. Denn in diesem Fall, wenn AD die gesuchte Linie, darf man nur CA, und CD messen, und jene Weite nach CB, diese nach CE in gerader Linie mit AC und DC zurücktragen, so ist EB = AD; nach §. 425. Sollte eine Hinderniß im Felde seyn, daß man CE nicht so weit zurücktragen könnte, so darf man die Hälfte oder den dritten Theil u. s. w. beederseits zurücktragen, da dann die EB der sovielte Theil von AD seyn wird als BC von CD, nach §. 527.

III. Fall. Wenn man nur zu einem Punkt kommen kann, so mißt man den Winkel, wo man an den Endpunkt kommen kann; z. E. *Fig.* 60. den Winkel CAB, wenn man vom Standpunkt C nach A kommen kann, wie vorausgesetzt wird, und macht in einer beliebigen Weite von C, z. E. in der Weite CD, den Winkel CDE = CAB; so ist CD : DE = CA : AB; also läßt sich AB finden, weil CD, DE, CA gegeben sind, oder sich unmittelbar messen lassen. Dieses ist unter verschiedenen andern Methoden die zuverläßigste, weil man den Standpunkt nicht ändern darf.

IV. Fall. Wenn man zu keinem Endpunkt kommen, sondern sie nur sehen kann, so könnte man *Fig.* 19. die Linie AC nach dem III. Fall, und CD nach eben dem III. Fall suchen, aus diesen beeden aber läßt nach dem II. Fall die gesuchte AD sich finden. Aber dieses Geschäffte ist zu weitläuftig, daß es heutzutag diejenige Feldmesser, die nur ein wenig die Geometrie verstehen, nicht gebrauchen. Wir wollen daher diese Aufgabe nach verschiedenen Weisen kürzer und mit mehrerer Genauigkeit aufzulösen suchen.

§. 851. Lehrsatz.

Eine Weite, zu deren keinem Endpunkten man kommen kann, läßt sich aus einem einigen Stand durch das Meßtischlein, ohne daß er dörfte verrückt werden, finden.

Beweis. Es sey *Fig.* 80. β. die Weite AE zu messen, die man nur siehet, ohne daß man zu A noch E kommen könnte. Man setze das Meßtischlein Baed in B, nehme BD zur Standlinie, die man messen kann, und suche zuerst BA, welches geschiehet, wenn man in C und D Stäbe in gerader Linie mit A einschlägt, so daß D den Stab C, und C den Punkt A decket; man ziehe auf dem Meßtischlein von B gegen A eine unbestimmte Linie, z. E. Ba, und gegen C und D die Linien Bc, Bd, so ist

△BCD ∽ △Bcd §. 526. folglich

der Winkel Bcd = BCD und dahero §. 532.

Der

der Winkel Bca = BCA. weil ferner
der Winkel cBa = CBA so ist §. 532.

△Bac ∽ △BAC. und dahero
bc : ba = BC : BA. also BA gefunden.

Ferner suche man mit verrücktem Meßtischlein aus eben dem Punkt die Weite AE. Zu welchem Ende man nur zwischen die Punkte E und D einen Stab F in gerader Linie einstecken muß, daß D den Stab F, und F den unzugänglichen Punkt E decket; hernach zieht man von B gegen F die Linie Bf so, daß fd parallel FD wird, folglich auch fe parallel FE, und de parallel DE. So ist Ba : ae = BA : AE. und also AE gefunden, aus eben dem Grunde der ähnlichen Dreyecke wie oben.

§. 852. Anm. Bey dieser Auflösung, welche mit dem Meßtischlein die bequemste und richtigste ist, weil es nicht verrückt oder hin und hergetragen werden darf, muß man doch sich lange auf dem Felde verweilen, bis die Stäbe B, D, D und C, D und F eingeschlagen sind: dahero, wo man nicht so viel Zeit hat, die trigonometrische Auflösung die kürzeste ist, davon wir jezo reden werden.

§. 853. Lehrsatz. Eine Weite, zu deren keinem Endpunkte man kommen kann, läßt sich trigonometrisch durch eine einige Standlinie und etliche an der Standlinie gemessene Winkel finden.

Bew. 1. Fall bey einer Höhe:

Es sey *Fig.* 102. CD eine unzugängliche Höhe, man messe die Standlinie AB, die Winkel CAD und B; so ist alles vorbey, und man kann die Rechnung zu Hause genau finden. Denn wenn CAD gemessen ist, so ist auch sein Nebenwinkel CAB gegeben; ist CAB gegeben, und B gemessen, so weiß man auch den Winkel ACB nach §. 468. Denn er ist 180° — (CAB + B) folglich trigonometrisch nach §. 757.

sin. ACB : AB = sin. B : CA. Also hat man die Seite CA gefunden; und weil die Höhe perpendicular steht, so ist bey D ein rechter Winkel; dahero man weiter sagt:

sin. tot. AC : = sin. CAD : CD. also weiß man die Höhe CD; alles diß wird durch Logarithmen berechnet, und so genau gefunden, als es nur immer durch Instrumente möglich.

II. Fall bey einer unzugänglichen Weite auf dem Felde. Man solle *Fig.* 103. die Weite DE messen, von welcher man durch einen Fluß abgeschnitten wird. Man mißt die Standlinie von A nach B, wo in A, C, B Stäbe eingestecket sind, man mißt ferner die Winkel DAC, DCA, ECB, EBC; so hat man auch die Winkel bey D und E nach §. 468. und den Winkel DCE §. 445.

folglich ist sin. ADC : AC = sin. A : DC

und sin. CEB : CB = sin. B : CE.

Man hat also die Seiten DC und CE gefunden, und weil man den Winkel DCE weiß, so wird in der Auflösung nach §. 757. zuerst einer von den Winkeln DEC oder EDC gesucht; hernach aus diesem Winkel die Seiten DE, weil

sin. DEC : DC = sin. DCE : DE. welches logarithmisch sich finden läßt.

§. 854. Anm. Wenn *Fig.* 103. DAC ein rechter Winkel werden kann, so ist die Auflösung noch leichter; weil es aber im Felde nicht allemal angeht, grose Linien zu ziehen, oder sie da zu ziehen, wo man sie am bequemsten rechnen kann, so haben wir die Auflösung lieber allgemein machen wollen.

§. 855. Erklär. Man sagt, die Linien werden verjüngt, wenn man das grösere Maas unter ein proportionirliches kleineres bringt; z. E. eine Weite von 90° im Felde, soll aufs Papier nach dem verjüngten Maasstabe gebracht werden; man nimmt einen Maasstab an, auf welchem die Ruthe kaum einen Zoll beträgt, und die Schuhe, Zolle, Linien nach Proportion ebenfalls kleiner gemacht werden. Der verjüngte Maasstab *Fig.* 106. α. läßt sich nach den Proportionsregeln §. 527. f. leicht zeichnen und gebrauchen. Wie sich dann auch jede Linie nach §. cit. proportionirlich einer andern gemäß theilen läßt.

Die

Die Messung und Verjüngung der Flächen, oder das Aufnehmen einer Gegend.

§. 856. **Lehrsatz.** Eine Fläche, in welche man hineingehen kann, wird ausgemessen, wenn man nach ihrer Länge *Fig.* 101. die Linie AE, und wo Ecke sind, die Parallellinien Bb, Cc, Ff, Gg, Hh, Ii u. s. w. ziehet; die Summe aller Trapezien nebst den zwey Dreyecken ABb, und IEi, die man aus Ii und EC, Bb und AI findet, wird der Inhalt der ganzen Fläche seyn. Diß ist eine der leichtesten Manieren.

§. 857. **Zusatz.** Eine Fläche, in die man hineingehen kann, wird auch ausgemessen, wenn man alle ihre Seiten und Diagonallinien mißt; in welchem Fall man, wie auch oben, kein anderes Werkzeug als Stäbe und Meßketten gebraucht, und man kann sie hernach auch verjüngen, weil durch die Diagonalen Dreyecke entstehen; wie *Fig.* 105. wo CA : AB = Ca : ab; ferner CB : BD = Cb : bd u. s. w.

§. 858. **Zusatz.** Kann man in die Fläche hineingehen, so wird sie auch gemessen und verjüngt, wenn man nach Belieben in der Fläche einen Punkt wie C *Fig.* 104. annimmt, und die Linien CD, CE, CF, u. s. w. und hernach die Parallelen de, ef, fg u. s. w. in der Distanz, wie man die verjüngte Figur haben will, ziehet; so ist a b d e f g die verjüngte Figur ABDEFG; denn CD : DE = Cd : de; CE : EF = Ce : ef; CF : FG = CF : fg u. s. w.

§. 859. **Zusatz.** Wenn man in die Fläche nicht hineinkommen, sondern nur um sie herumgehen kann, so mißt man alle Seiten und Winkel; aus welchen sich die Figur bestimmen und verjüngen läßt.

§. 860. **Zusatz.** Wenn man in die Figur weder hineinkommen, noch um dieselbe herumgehen kann, sondern sie und ihre Winkel nur aus zwey Ständen von ferne übersehen kann: so mißt man nach §. 851. die Seiten, als Weiten die man siehet, aber zu denen man nicht kommen kann, und ihre Lagen gegeneinander nach §. cit. da man dann die ganze Figur bekommt und sie in Grund legen kann.

§. 861. Anm. Auf diese Art werden ganze Gegenden aufgenommen und in den Grund gelegt; man begreift aber von selbst, daß man besonders bey grosen und mehrere Meilen breiten und langen Gegenden die optische Wissenschaften, das Wasserwägen, die geographische Linien, die in der mathematischen Geographie vorkommen, zugleich verstehen müsse, wenn es an der Genauigkeit, eine grose Gegend richtig aufzunehmen, nicht fehlen solle. Jedoch bey kleinern Gegenden, die kaum eine Meile betragen, hat man die hier genannte Wissenschaften der angewandten Mathematik nicht so nöthig.

Etwas von der Markscheidekunst.

§. 862. **Erklär.** Die **Markscheidekunst** oder die unterirrdische Geometrie ist die Wissenschaft, die unter der Erden gemachte Gänge, die man Grubengebäude nennet, auszumessen und zu zeichnen, oder in den Riß zu bringen.

§. 863. **Zusatz.** Wer also die Geometrie versteht, der wird die Markscheidekunst bald lernen, wenn er nur die Sprache der Bergleute sich bekannt

macht,

macht, und mit denen zum unterirrdischen Messen tauglichen Instrumenten, die in der Hauptsache von den übrigen Instrumenten der practischen Geometrie nicht viel unterschieden sind, umzugehen weiß.

§. 864. Anm. Wir wollen die Bergmannssprache kürzlich erklären, damit man hernach von dem gesagten desto besser überzeugt werde. Das Längenmaas heißt ein *Lachter*, das gemeiniglich 6 Schuh hält, wie ein Klafter. Ein Schuh hält 10 Zoll, und ein Zoll 10 Gran; folglich läßt sich ein Lachter in Gran geben. Im Flächenmaas hat man die Namen Fundgrube, Wehr, Lehn; eine Fundgrube hält drey Wehr, ein Wehr zwey Lehne, ein Lehn ist 7 Lachter lang und breit. Für die Namen horizontal, pervendicular und schief sind in den Bergwerken ganz andere eingeführt: wenn man ein rechtwinklichtes Dreyeck betrachtet, bey welchem alle drey Namen, horizontal, vertical und schief vorkommen, so heißt die horizontale Grundlinie die Sohle, die perpendicular oder aufrecht stehende Seite die Seiger-Teufe, und die schiefe Hypothenuse die Fläche, worauf man in die Grube auf- und absteigt. Die gegrabene Gänge heissen Gruben oder Grubengebäude; sind sie perpendicular oder unter einem Winkel, der mit dem Horizont 80—90° macht, so heißt man sie einen Schacht; gehen sie mehr horizontal, so heissen sie Stollen. Ein Gang, der mit dem Horizont einen Winkel von 60—80° macht, heißt ein stehender Gang, ein flacher, der einen Winkel von 20—60°, und ein schwebender Gang, der einen Winkel zwischen dem Horizont und 20° macht. Was in die Höhe geht, sind steigende, was in die Tiefe, fallende Gänge; Steigen und Fallen heißt die Dohnlege, die Messung heißt ein Zug, unter der Erden ein Grubenzug, oberhalb der Erden ein Tagzug. Bringt man das gemessene überhaupt aufs Papier, so heißt es zulegen, vom Papier aufs Feld, zugeben. Vermessen ist den Ort auf der Oberfläche der Erde bestimmen, wie weit man graben dörfe. Orthungen sind diejenige Punkte der Gruben, wo ein Winkel ist, oder die Gruben sich wenden, da man also nicht gerad fortmessen kann, sondern eine neue Linie zieht. Orthungen am Anfang und Ende der Gruben heissen ganze Orthungen; und wenn sie oben auf der Erde perpendicular angezeigt werden, so sagt man: die Orthung werde an Tag ausgebracht. Die Pfähle, womit dieses geschiehet, heissen Ortpfähle; und die Steine *Lochsteine*. Ein Perpendikel von einem Punkt über der Erde in die Grube heißt die *Lochsteine* in die Grube fällen. Ein Durchschlag ist ein von einem Punkt zu einer Grube gemach-

ter Zugang. Resolviren heißt aus zwey Stücken des rechtwinklichten Dreyecks, z. E. aus der Fläche (hypothenuse) und einem Winkel ausser dem rechten die übrige Stücke finden, z. E. die Seigerteufe und Sohle.

§. 265. Anm. Die Instrumente, die man zum Markscheiden braucht, sind die Gradbogen oder die Wasserwaage, die wie ein Transporteur mit einem Bleywurf aussiehet; der Häng- oder Grubencompaß, welcher wie ein anderer Compaß beschaffen ist, nur daß die Peripherie in 24 gleiche Theile getheilt ist, die man nach den Stunden des Tages, Stunden nennt; die 12te gegen Mittag wird bezeichnet mit Merid. und die 12te gegen Mitternacht mit Septentr. auf die Abendseite kommen die Morgenstunden; und auf die Morgenseite die Abendstunden, wie bey Sonnenuhren. Nach diesen Stunden oder Weltgegenden heissen die zwischen 9 und 12 fallende Gänge, flache, die zwischen 12 und 3, stehende, zwischen 3 und 6, Morgen- und zwischen 6 und 9, Spargänge. Ausser diesen Instrumenten hat man noch die Stundenscheibe und Stundentransporteur, welche wie die Peripherie des Compasses eingetheilt sind, und das Zuleginstrument zum Zeichnen und Verjüngen der Grubengebäude nöthig. Man lernt sie besser durch das wirkliche Anschauen als durch Zeichnung kennen und gebrauchen. Uebrigens sieht man aus dieser kurzen Nachricht, daß die geometrische Wissenschaften einem Markscheider unentbehrlich seyen, und daß er in seiner Kunst desto weiter es bringen werde, je mehr er sich mit der Geometrie und Trigonometrie bekannt gemacht hat.

Viertes Hauptstück,

von der höhern Geometrie.

§. 866.

Erklärung.

Unter der höhern Geometrie verstehen wir sowohl die Wissenschaft, alle übrige krumme Linien ausser dem Cirkel zu bestimmen, und durch eine Art Gleichungen auszudrucken, auch wo es seyn kann, auszumessen, als auch die Rechnung des Unendlichen, die, wie im Erfolg deutlich erhellen wird, nicht nur in Rucksicht auf ihre Anwendung, sondern auch selbst auf ihre Erfindung einen weit grössern Antheil an der Geometrie als an der Arithmetik hat, folglich unter dem allgemeinen Namen der höhern Geometrie mit begriffen werden kann. Welches wir deßwegen anmerken, weil sonsten dieser Theil der höhern Geometrie die Analysis des Unendlichen genannt und unter diesem Titel vorgetragen wird. Wir wollen, wie in den bisherigen Hauptstücken, zuerst die Geschichte der höhern Geometrie vortragen.

Geschichte der höhern Geometrie.

§. 867. Bey der Geschichte der höhern Geometrie darfen wir in der Zeitordnung nicht über den Apollonius uns hinaus wagen. Denn obschon noch verschiedene vorher sich mit Betrachtung der krummen Linien ausser dem Cirkel beschäfftiget haben, so sind theils ihre Arbeiten sämtlich verlohren gegangen, theils kann man ihre Erfindung mit keiner völligen Gewißheit bestimmen.

§. 868. Anm. Was nun den Apollonius betrifft, so ist er zu Pergen, einer Stadt in Pamphilien, gebohren, zur Zeit des Königs Ptolemäus Evergetes, ungefehr 247 Jahr vor Christi Geburt; Er war gegen 40 Jahr jünger als Archimedes, von dem wir auch sogleich was reden werden. Cardanus gibt ihm die siebende Stelle unter den subtilsten Köpfen, die jemals die Welt gesehen hätte. Er legte sich mit allem Fleisse unter den Nachfolgern des Euclides zu Alexandrien auf die mathematische Wissenschaften, und brachte es darinnen so weit, daß er acht Bücher von den conischen Sectionen oder Kegelschnitten herausgab, worinnen er zuerst zeigte, daß man aus einem jeden Conus oder Kegel alle drey Sectionen schneiden könne, da man vorher glaubte, zu einer Parabel müsse man einen rechtwinklichten, zur Ellipse einen spitzwinklichten, und zur Hyperbel einen stumpfwinklichten Kegel haben. Ausser dieser Erfindung hat Apollonius alles in seinen acht Büchern zusammen getragen, was Aristäus, Eudoxus Menechmus, Euclides, Conon, auch zum Theil Archimedes und andere vor ihm von Kegelschnitten gelehrt haben.

§. 869. Anm. Die acht Bücher des Apollonius sind nicht immer bis auf unsere Zeiten ganz vorhanden gewesen. Im vorigen Jahrhundert hatte man nur die vier erste, welche ursprünglich griechisch noch übrig sind; nachgehends hat Jac. Golius noch drey arabisch übersetzte Bücher des Apollonius aus dem Orient erhalten, und solche lateinisch herausgegeben. Das achte schätzte man für verlohren; bis endlich Edm. Halley in der bodlejanischen Bibliothek ein arabisches Mscpt davon fand, welches er 1706. lateinisch herausgab. Halley schreibt in der Vorrede, Edm. Bernardi habe das Werk zu übersetzen angefangen, wäre aber darüber verlegen; endlich hat Halley, unerachtet er kein arabisch verstunde, aus der Bernardischen angefangenen Uebersetzung den Rest vollends dechifriret. Man hat auch noch andere Uebersetzungen. Und auf diese Weise hat man nun den Apollonius

ganz, aber nur die vier erste Bücher in der Originalsprache. Uebrigens ist diß Werk so allgemein und abstrakt geschrieben, daß Keppler in Introd. Comm. de stella Martis schreibt: Quotusquisque Mathematicorum est, qui tolerat laborem perlegendi Apollonii Pergæi conica? Daß dieses übrigens die wahre Arbeit des Apollonius seye, erhellet aus dem Pappus von Alexandrien, welcher ungefehr gegen das Ende des vierten Jahrhunderts nach Christi Geburt seine Collectanea mathematica herausgegeben, und von dieser Apollonischen Arbeit ausführlich geschrieben hat. Die beste Commentatores über den Apollonius unter den Alten waren der Eutocius, der unter dem Kayser Justinianus sich einen Namen machte, und hernach die Hypatia, die Tochter des Theons, welche dem Suidas zu Folge sich mit eben dieser Arbeit beschäfftigte; nachgehends wurden im Jahr 900 nach Christi Geburt die Werke des Apollonius in das Arabische übersetzt, und von dieser Zeit an kamen sie unter den Christen in eine ziemliche Vergessenheit, bis im 14 und folgenden Jahrhunderten mit andern Wissenschaften auch die mathematische wieder hergestellt wurden.

§. 870. Anm. Ausser den Kegelschnitten haben die Alten noch einige andere Linien betrachtet, dergleichen die Spirallinie des Archimedes, die Quadratrix des Dinostratis u. s. w. Man hat aber die Betrachtung der aus conischen Schnitten entstehenden krummen Linien immer vorgezogen, und wegen ihrer Nutzbarkeit sich vornemlich damit beschäfftiget.

§. 871. Anm. Wir haben schon gemeldet, daß die Wissenschaften im sechsten Jahrhundert unter den Christen sehr abnahmen, und bald darauf ihren Zug zu den Arabern genommen, welche die philosophische und mathematische Werke der alten Griechen übersetzen liessen, und mit Nutzen gebrauchten. Als endlich die Araber, nach der Vereinigung mit den Türken, den Geschmack an Wissenschaften wieder verlohren, gieng ein neues Licht in den Abendländern unter den Christen auf, und die Mathematik bekam auch eine neue Gestalt; doch gieng es etwas langsamer, und man wird nicht wohl schicklicher als mit dem vorigen Jahrhundert den Anfang machen können, wenn man die Geburtszeit der neuern mathematischen Wissenschaften bestimmen will. Was in Rucksicht auf die Buchstabenrechnung von Cardanus, Vieta und nach ihm vom Cartesius geleistet worden, haben wir im II. Hauptstück der arithm. Wissensch. gemeldet. Wir wollen also nur von der Rechnung des Unendlichen noch reden.

§. 872. Wann wir bey Untersuchung der neuen Geschichte der Analysis des Unendlichen den Isaac Barrow, einen gleich grosen Theologen und Ma-

thematicum, unter welchem Newton den Grund zu seinen erhabenen Studien geleget hat, vor allen andern zuerst nennen, so werden wir am wenigsten irren. Er hat das Triangulum characteristicum, wie es die Leibnizianer nennen, aus Betrachtung der Subtangente unstrittig erfunden, und was die Teutsche dy und dx nennen, e und a genannt; die Figur, wie sie in den Schriften der Analysten noch jezo zu Grund gelegt wird, und die Erklärung davon steht in Barrows Lectionibus opticis, die ein **Newton** sowohl als ein **Leibniz** lesen konnte. Nun ist das freylich noch nicht die ganze Rechnung des Unendlichen; aber einem Newton oder Leibniz durfte man nur einen Fingerzeig geben, so konnten sie weiter schliessen: daher es gar wohl begreiflich ist, daß Newton und Leibniz jeder vor sich aus des Barrow Schriften oder Unterricht so viel Licht bekommen, daß sie die Rechnung des Unendlichen oder die so gemeinnützige und erhabene Analysis nach ihren ersten Gründen erfunden haben; da dann der ganze Streit, wem die Ehre der Erfindung gebühre, auf einmal entschieden wäre. Denn daß mehrere Gelehrten einerley Satz erfinden, gibt es genug Exempel. Den wichtigen Satz von den Differentialien vermischter Functionen, die wir an seinem Ort erklären werden, haben in neuern Zeiten Herr **Euler** und Herr **Clairaut** jeder für sich erfunden.

§. 873. Die ersten Erfinder der neuern Analysis waren also Barrow, der den Grund gelegt, Newton und Leibniz, die darauf zuerst gebauet haben. Ich sage der neuern Analysis, denn es scheint, sie seye nur wieder erfunden worden, als eine den Alten bekannte und nachgehends verlohrne Kunst. Denn Archimedes hat die Parabel quadriren können, wie man sie durch die Integralrechnung quadriren kann. Es ist dahero fast zu vermuthen,

then, er habe die Analysin mit andern gewußt, aber geheim gehalten, und die dadurch erfundene Sätze synthetisch vorgetragen. Doch es ist eine Muthmassung: denn er kann die Quadratur der Parabel auch ohne Analysis des Unendlichen durch andere Rechnung erfunden haben. Wir kommen auf die neuere Geschichte wieder zurück. Isaac Barrow wurde 1630 zu London gebohren, er studierte zu Cambridge, gieng 1655 auf Reisen, zu deren Bestreitung er seine Bücher verkaufte, besahe Frankreich, Italien, die Levante, Constantinopel, und kam 1659 über Venedig, Teutschland und Holland wieder nach Haus. Er wurde hierauf Prediger, und erhielte bald hernach die Profession der griechischen Sprache zu Cambridge; 1662 wurde er Prof. der Geometrie, und das folgende Jahr Mitglied der königlichen Societät der Wissenschaften; 1670 wurde er Doctor und Prof. der Theol. und überließ die mathematische Profession seinem grosen Schüler, dem Newton. 1675 wurde er Canzler, und starb 1677 zu London, als er dahin reisete, die Passionspredigten, als Caplan Carl des II. welche Stelle er dabey hatte, zu halten. Seine Schriften sind eine Ausgabe des Euclides; Euclidis Elem. XV. breviter demonstrata, ferner Lectiones opticæ 18. in Scholis publicis Cantabrigiæ habitæ; wo eben die ersten Gründe zur Analysis vorkommen. u. s. w. Seine theologische Werke hat Tillotson in drey Folianten zusammen herausgegeben, und sein Leben dabey ausführlich beschrieben. Isaac Newton verdient ein gleich grosses Angedenken. Er wurde 1642 in der Provinz Lincoln gebohren. Zu Cambridge studierte und lehrte er bis aufs Jahr 1688; da er zum Parlamentsglied nach London von Seiten der Universität gewählt wurde. 1699 wurde er Obermünzmeister zu London, und zugleich 1703 Präsident der Societät der Wissenschaften. Diese Bedienung behielt er bis an sein Ende, das den 20. März 1728 erfolgte; da er 84 Jahr alt war. Man begrub ihn in der Abtey Westmünster, wo ihm auf öffentliche Kosten ein prächtiges Grabmaal gebaut wurde; die Innschrift zeugt von seinen Verdiensten, Einsicht, Gottesfurcht und ganzem Character; sie ist die folgende: Isaacus Newtonus, Eques Auratus, qui animi vi prope divina planetarum motus, figuras, cometarum semitas, oceanique æstus, sua matheſi facem præferente, primus demonstravit, radiorum lucis dissimilitudines, colorumque inde nascentium proprietates, quas nemo ante suspicatus erat, perveſtigavit. Naturæ, Antiquitatis, S. Scripturæ, sedulus, sagax, fidus Interpres, Dei O. M. Majestatem aperuit, Evangelii simplicitatem moribus expreſſit! sibi gratulentur mortales tale tantumque extitisse humani generis decus. Nat. 25. Dec. 1642.

denat.

denat. 20 Mart. 1728. Gottfr. Wilh. Leibniz wurde 4 Jahr nach dem Newton zu Leipzig 1646 gebohren; studierte mit grosem Fleiß, und wurde zu Altorf Doctor in der Rechtsgelehrsamkeit, bald darauf Churmaynzischer Rath und Hofmeister der jungen Herrn von Boineburg, die er nach Paris, Holland und Engelland, und von da aus nach Hannover führte, wo er Herzogl. Rath und Bibliothekarius wurde; einige Zeit hernach bekam er Befehl, die Historie des Hauses Braunschweig zu schreiben, zu welchem Ende er verschiedene Reisen durch Teutschland und Italien machte; 1700 wurde er Mitglied der Academ. zu Paris, Präsident der Acad. zu Berlin, ferner russischer geh. Rath mit einem Gehalt von 1000 Ducaten, unter dem Czaar Peter, endlich Reichshofrath zu Wien und Baron, auch königl. engl. geh. Rath und Historiographus; er starb 1716 den 14 Nov. L'Advocat schreibet in seinem gelehrten Lexico, der Verdruß über das wider ihn ausgefallene Urtheil, die Erfindung der Differentialrechnung betreffend, habe viel zu seinem Tode beygetragen. Man hat aber billige Ursachen, an der Richtigkeit dieser Aussage sehr zu zweifeln. Aus dieser Geschichte sieht man, daß Leibniz nicht nur ein Mathematicus, sondern ein gleich groser Philosoph und Historicus, überhaupt einer der größten Geister des vorigen Jahrhunderts gewesen sey.

§. 874. Anm. So wichtig auch die Erfindungen eines Newton und Leibnizen waren, so würden sie doch nicht so gemeinnützig geworden seyn, wenn sich nicht zu gutem Glück um diese Zeit gleich grose Kenner gefunden hätten, welche das angefangene Gebäude erweitern und bis auf den höchsten Gipfel vollführen konnten. Das waren die berühmten Bernoulli und der Marquis d'Hopital; was die Herren Bernoulli betrifft, so sind die erste Jac. und Joh. Bernoulli, zween Brüder, deren erster 1654. der letztere aber 1667. zu Basel gebohren wurde. Ersterer wurde Prof. der Mathematik zu Basel, und der jüngere folgte ihm in der Profession nach seinem 1705. erfolgten Tod. Dieser brachte es ungleich weiter als sein frühe verstorbener Herr Bruder, mit welchem er gemeinschaftlich den Differentialcalcul auflößte, wie ihn Herr von Leibniz in den Actis Erud. 1684. bekannt machte. Allein Joh. Bernoulli dachte noch weiter, und kam in seinen Schriften auf die Integralrechnung und deren Erweiterung, ferner auf den Exponentialcalculum und auf die logarithmische Differentialien: wodurch die Rechnung des Unendlichen ungemein verschönert und nützlicher wurde. Dieser Joh. Bernoulli ist ein Vater von drey eben so gelehrten Herrn Söhnen, dem Hrn. Nicolaus, dem Hrn. Daniel und Hrn. Joh. Bernoulli. Der erste, der eine neue Art, die Gestalt der unendlichen Reyhe zu finden, bekannt machte, und in die Fußstapfen seines grosen Herrn Vaters trat, starb zu Petersburg frühzeitig im Jahr 1726. da er kaum 31 Jahr alt war; der andere ist der noch jezo lebende berühmte Dan. Bernoulli, der zu Basel die

Ma-

Mathematik und Naturlehre mit seinem Herrn Bruder lehret. Der berühmte Herr Vater starb 1748. den 1. Jenner in einem hohen und verdienstvollen Alter. Wilhelm Franz Anton, Marquis von Hopital stiftete eine genaue Freundschaft mit diesem Herrn Bernoulli, und machte sich durch seine Analyse des infiniment petits 1696. berühmt; er starb 1704 in einem Alter von 44 Jahren.

§. 875. In dem gegenwärtigen Jahrhundert hat man die höhere Geometrie fast auf den höchsten Gipfel gebracht, nachdem unter den Teutschen Hr. Prof. Leonh. Euler zu Petersburg, und der schon genannte Herr Dan. Bernoulli zu Basel, auch der verstorbene Herr Gabriel Cramer in Genev, der sich durch die Linien von doppelter Krümmung (à double courbure) einen Namen machte, unter den Engländern ein Maclaurin in seinem Treatise of Fluxions, unter den Franzosen Herr Clairaut und Herr D'Alembert, doch jener vorzüglich, in der reinen Mathematik, die wichtigste Erfindungen gemacht haben, wovon wir im folgenden reden werden.

§. 876. Anm. Die mathematische Handbücher, die in Teutschland, besonders in gegenwärtigem Jahrhundert, herausgekommen, verdienen hier noch eine Stelle; das erste ist das Wolfische, nemlich die lat. Elemente, auch die teutsche Anfangsgründe, in welchen von der höhern Geometrie so viel stehet, als man zu Anfang dieses Jahrhunderts wußte; sie haben sich ein halbes Jahrhundert erhalten; die Hausenische Schriften sind noch besser, wurden aber nicht so gemein als die Wolfische. In Zeit von zehen Jahren sind aber drey sehr gute Handbücher zum Vorschein gekommen, durch welche das Wolfische verdrungen zu werden scheint, wenn anders die Lehrer, auch auf Academien, die neuere Entdeckungen der Analysis sich bekannt machen, und kein allzugroses Vorurtheil für dasjenige haben, was und wie sie die Sache ehemals gelernet haben, da man nur das zu denselbigen Zeiten recht gute Wolfische Handbuch erklärte. Diese neue Handbücher sind das Segnerischel, von welchem die Verfasser der Göttingischen gel. Anzeigen 1758. p. 138. schreiben: „Der Nutzen dieses Werks fält desto deutlicher in die Augen, da man in Teutschland zur Analysis kein anders Lehrbuch als das Wolfische hat brauchen können, das in der That zu der Zeit, da es herauskam, vor 50 Jahren, von der damaligen Vollkommenheit der Wissenschaften weniger entfernet war, als von der jezigen, aber doch seitdem

fast die Asymptote der analytischen Einsicht der meisten teutschen Professoren der Mathematik geblieben.„ Das andere ist das Carstenische, das unter dem Titel: Matheſis theoretica elementaris atque sublimior 1760. zu Rostock herauskam, und nebenher ein Auszug aus der Eulerischen Introd. in Analyſ. finit. und Infinitorum ist. Das dritte ist das Kästnerische vom Jahr 1759 — 61. welches unsers Erachtens das beste ist, weil es das Beste aus allen sowohl teutschen als englischen und französischen neuen Schriftstellern der Mathematik in sich enthält, und auf eine überzeugende Art, wiewohlen nicht überall für Anfänger, sondern vorzüglich für geübte Leser, vorträgt.

Allgemeine Begriffe von algebraischen und höhern Functionen.

§. 877. Erklär. Wenn der Wehrt einer veränderlichen Gröſe, das ist einer solchen, die gröſer oder kleiner werden kann, durch eine andere ebenfalls veränderliche Gröſe mit Zuziehung beständiger Gröſen so bestimmt wird, daß, man mag für die veränderliche Gröſen seßen, was man will, die Bestimmung allemal sich anwenden läßt; so sagt man, eine Gröſe sey eine **Function** von der andern.

§. 878. Erläuterung. Wir wollen die Sache mit Exempeln deutlich machen. Wenn $y = \frac{bx}{a}$, so ist y eine Function von x, und x eine Function von y; b und a sollen beständige Gröſen seyn, die immer einerley Wehrt haben, y und x mag seyn und werden was es will. Ferner der Wehrt von y solle nicht verändert werden, ohne daß auch der Wehrt von x verändert werde, woferne die Gleichung bleiben solle; welches man in dem Exempel leicht siehet, denn wenn $\frac{a}{b}$ unveränderlich ist, und y gröſer wird, so muß auch x gröſer werden, geſetzt daß in allen möglichen Fällen $y = \frac{bx}{a}$. Diese Gröſen y und x, die Functionen von einander sind, heißt man deßwegen veränderliche Gröſen, weil man alle mögliche Gröſen und Zahlen, ganze und gebro-

brochene, positive und negative, rationale und irrationale, ja selbst unmögliche Grösen (imaginarias quantitates) sogar auch null dafür setzen kann, um hernach zu sehen, was aus der andern veränderlichen Gröse, deren Function sie ist, bey dieser Veränderung werde.

§. 879. **Erklär.** Die Functionen werden in algebraische und transscendentische eingetheilt. Eine **algebraische Function** ist, die sich durch gerade Linien und ihre Verbindung untereinander so ausdrucken läßt, daß man sie zulezt auf die Elementargeometrie resolviren kann; wie den obigen Ausdruck, wo $y = \frac{ax}{b}$ eine gerade Linie ist; oder wie bey dem Cirkel, wo $y^2 = ax - x^2$, welches die Gleichung für die Cirkel ist. §. 535. Die algebraische Functionen sind ferner entweder einförmig oder vielförmig (uniformes vel multiformes) jene haben nur einen Wehrt, wenn man für die veränderliche Gröse eine Zahl seßt; diese haben mehrere; z. E. bey den quadratischen Gleichungen zwey, bey den cubischen drey, u. s. w. nach §§. 331. sie heissen daher zweyförmig, dreyförmig u. s. w. (biformes, triformes functiones). Eine weitere Eintheilung ist die Theilung der Functionen in gleichnamige und ungleichnamige, (homogeneæ & heterogeneæ) jene haben gleiche Dimensionen in den veränderlichen Grösen, z. E. $\alpha y = \beta z$, wo die Function gleichnamig, und von einer Dimension ist. Die heterogeneæ haben ungleiche Dimensionen. Endlich werden diese algebraische Functionen noch in complexe und in uncomplexe (complexas & incomplexas) oder vermischte und unvermischte eingetheilt; bey diesen ist nur eine veränderliche Gröse, die einen Exponenten haben kann, was man für einen will, und in eine beständige Gröse multiplicirt ist, z. E.

y =

$y = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$ ist eine incomplexe Function; alle andere heissen complexe Functionen. Diejenige Functionen, die sich nicht algebraisch ausdrucken lassen, sind transscendentische Functionen, so sind die Sinus und Bogen transscendentische Functionen von einander.

§. 880. **Zusatz.** Wenn P, Q, R einförmige Functionen von x sind, so ist der Ausdruck $y^2 + Py + Q = o$ der allgemeine Ausdruck für alle zweyförmige Functionen für x, und der $y^3 + Py^2 + Qy + R = o$ für alle dreyförmige, und der $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} + Ry^{n-3} - - - - = o$ für alle vielförmige.

§. 881. **Zusatz.** Weil sich eine unbestimmte Linie geometrisch ziehen läßt, so lassen sich algebraische Functionen durch Linien ausdrucken. Denn man ziehe eine Linie von unbestimmter Länge, und nenne sie x, es sey z. E. *Fig.* 108. die Linie AH, man setze den Punkt A wo sie anfahen solle; von A nach M solle sie von andern Linien, wie MP, geschnitten, das ist, durch diese Linien sollen gewisse Theile der unbestimmten Linien wie AF, AP abgeschnitten werden, so wird allemal durch diesen Schnitt ein gewisser Theil bestimmt werden; welcher nach und nach alle mögliche Wehrte von x bestimmt, denn wenn man die Linie in den Anfangspunkt A schneidet, so ist $x = o$, geht man ruckwarts gegen T, so ist x negativ; positiv aber gegen H.

§. 882. Anm. Man siehet hieraus, wie der Name der Abscissen entstanden; denn diese Linie AH heißt die Abscissenlinie, und eine jede darauf abgeschnittene Linie eine Abscisse.

§. 883.

§. 883. Erklär. Die Linie, welche auf diese Weise abgeschnitten wird, heißt die Abscisse, AP, AH, und die Linie, welche sie schneidet, die Ordinate.

§. 884. Anm. Wenn *Fig.* 60. CA = a, AB = b, AD = x, DE = y gesetzt wird; so ist nach §. 527. $y = \frac{bx}{a} = DC$; ein allgemeiner Ausdruck aller Parallelen mit AB, zwischen den Schenkeln CA und CB, eben so *Fig.* 59. wenn AB = a, AD = x die Abscisse, und DE = y gesetzt wird; so ist, weil AD : DE = DE : DB = AB — AD; x : y = y : a — x, folglich $ax - xx = y$ der algebraische Ausdruck für alle Cirkel.

§. 885. Zusatz. Wenn eine homogenische Function von zwo veränderlichen Grösen gegeben ist, und man setzt für die eine veränderliche Grösse das Product der andern in eine dritte, die u heissen solle, so kann man die eine veränderliche Grösse hinwegschaffen. Denn es sey

$$V = \frac{y+z}{y-z}$$ man setze für $y = uz$ so ist

$$V = \frac{uz+z}{uz-z} = \frac{(u+1)z}{(u-1)z} = \frac{u+1}{u-1}$$

Wenn also y und z mehr, z. E. n Dimensionen hätten, so würde es auch angehen, wie man leicht es auf eine ähnliche Weise berechnen kann.

§. 886. Expl. Es sey $V = \frac{y - \sqrt{y^2 - z^2}}{z}$, man setze $y = uz$ so hat man

$$V = \frac{uz - \sqrt{(u^2-1)z^2}}{z} = \frac{uz - z\sqrt{(u^2-1)}}{z} = u - \sqrt{u^2-1}$$

Die algebraische Linien, besonders die Kegelschnitte, oder die Parabel, Ellipse und Hyperbel.

§. 887. Erklär. Ein Kegel *Fig.* 107. kann auf verschiedene Weise von einer ebenen Fläche geschnitten werden; 1) durch den Scheitel, in welchem Fall ein Dreyeck entsteht, 2) mit der Grundfläche parallel, da es einen Cirkel gibt, welcher auch entsteht durch die sogenannte Sectionem subcontrariam bey einem ungleichseitigen Kegel (cono scaleno), 3) durch einen parallelen Schnitt mit einer Seite DC, da eine Parabel herauskommt, 4) durch einen schiefen Schnitt von A gegen C, daß der Schnitt auf beeden Seiten durchgeht, woraus eine Ellipse entsteht, und endlich 5) durch einen schiefen Schnitt, der sich herabwärts immer weiter von des Kegels entgegengesetzter Seite DC entfernt, und wenn der Schnitt oberhalb verlängert würde, einen gleichen umgekehrten Kegel, der auf D stünde, eben so schneiden würde.

§. 888. Anm. Das Dreyeck und der Cirkel ist in der Elementargeometrie betrachtet worden, man betrachtet also hier nur die drey letztere Schnitte.

§. 889. Anm. Die Ursache ihrer Benennung muß man aus der griechischen Sprache entlehnen, und die Wörter hernach mit den Definitionen dieser krummen Linien vergleichen. Parabola heißt eine Gleichheit; und die erste conische Section bekam deßwegen diesen Namen, weil in derselben das Product aus einer beständigen Linie AK in die Abscisse allemal dem Quadrat der Semiordinate gleich ist. Ellipsis heißt ein Defect, ein Mangel; und die zweyte conische Section heißt deßwegen so, weil das Quadrat der Semiordinate etwas weniger als das obige Product ist. Hyperbola heißt ein Ueberfluß, was gröser ist; und die dritte conische Section heißt deßwegen so, weil das Quadrat ihrer Semiordinaten gröser ist als das obige Product.

§. 890. Erklär. Die Linien, wo die Abscissen oder die Wehrte von x angenommen werden, heissen in allen algebraischen Linien die Abscissenlinien, und zwar die Axe, wenn die Ordinate perpendicular darauf steht, oder welches gleichviel ist, wenn der Ordinatenwinkel ein rechter ist wie *Fig.* 108. 109. 110. wo PM auf AP lothrecht stehet. AP, AH sind Abscissen, PM, FN sind Ordinaten, (ordinatim applicatæ) A *Fig.* 108. ist der Anfang der Abscissen, der Scheitel (Vertex). Ordinaten und Abscissen zusammen heissen Coordinaten, und sind Functionen von einander; (die Alten haben die Sehnen der Kegelschnitte Ordinatas und ihre Hälften Semiordinatas genannt). Der Buchstabe x bedeutet insgemein die Abscisse, wenn nicht was anders dabey erinnert wird, und y die Ordinate. Der Parameter ist die beständige Linie, welche a oder b genannt wird.

Die Parabel.

§. 891. Erklär. Wenn die Coordinaten rechtwinklicht sind, so heißt diejenige krumme Linie, in welcher $ax = y^2$ die **Parabel**; a ist der Parameter; also hier die dritte Proportionallinie zur Abscisse und Semiordinate; und y oder die Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der Abscisse.

§. 892. Zusatz. Weil bey rechtwinklichten Coordinaten in der Parabel $y^2 = ax$, so ist $y = \pm\sqrt{ax}$, folglich gehören jeder Abscisse zwo entgegengesetzte gleiche Semiordinaten zu.

§. 893. **Zusatz.** Ist $x = o$, so ist auch $ax = o$, folglich auch $y = o$, dahero die Axe der Parabel im Anfang der Abscissen geschnitten wird.

§. 894. **Zusatz.** Ist x negativ, so ist auch ax negativ, weil a immer positiv, folglich $y^2 = -ax$, und $y = \sqrt{-ax}$, eine unmögliche Grösse, also gibt es keine Ordinaten für die verneinte Abscissen in der Parabel, und die Parabel hat nur zween unendliche Schenkel (Ramos) zu beeden Seiten der Axe, weil positiv $ax = y^2$ unendlich wachsen kann.

§. 895. **Erklär.** Der **Brennpunkt** ist derjenige Punkt der Axe der krummen Linie, wo die Ordinate, oder nach der Sprache der Alten, die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist.

§. 896. **Lehrsatz.** Der Brennpunkt in der Parabel ist um den vierten Theil des Parameters von dem Scheitelpunkt entfernt; das ist, wenn diese Distanz x heisset. Satz. *Fig.* 108.

$$x = \frac{1}{4}a.$$

Bew.

$ax = y^2$ Erkl. der Parabel §. 891.

$y = \frac{1}{2}a$ Erkl. des Brennpunkts §. 895. subst.

$ax = \frac{1}{4}a^2$

$:a$

$x = \frac{1}{4}a.$

§. 897. **Zusatz.** Die Differenz zwischen der Abscisse AP und der Distanz vom Scheitelpunkt AF ist also $= AP - AF = x - \frac{1}{4}a = PF$.

§. 898. **Zusatz.** Eine jede gerade Linie vom Brennpunkt an die Krümmung der Parabel, wie die Linie FM, ist der Abscisse AP und der Distanz des Brennpunkts vom Scheitel AF zusammen gleich.

Satz.

Satz. *Fig.* 108.

$FM = x + \frac{1}{4}a$.

Bew.

$PM^2 = ax$ nach der Erkl. der Parabel §. 891.

$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$ §. 897.

add.

$PM^2 + PF^2 = x^2 + \frac{2}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

$\surd$ extr.

$\surd PM^2 + PF^2 = x + \frac{1}{4}a$ aber

$\surd PM^2 + PF^2 = FM$ nach dem Pyth. Lehrsatz

$FM = x + \frac{1}{4}a$.

§. 899. Lehrsatz. Die Abscissen verhalten sich wie die Quadrate der Semiordinaten.

Satz. *Fig.* 108.

$AF : AP = FN^2 : PM^2$.

Bew.

$AF \cdot a = FN^2$ und $AP \cdot a = PM^2$ §. 891. folgl.

$AF \cdot a : AP \cdot a = FN^2 : PM^2$

a:

$AF : AP = FN^2 : PM^2$.

§. 900. Zusatz. Folglich $\surd AF : \surd AP = FN : PM$, oder die Ordinaten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Abscissen.

Die Ellipse.

§. 901. Erklär. Die Ellipse ist diejenige conische Section oder krumme Linie, in welcher das Quadrat der Ordinate dem Product des Parameters in die Abscisse, weniger dem Product aus dem Quadrat der Abscisse in den durch die grose Axe dividirten Parameter gleich ist. Der Parameter heisse $= b$,

die grösere Axe *Fig.* 109. AB=a, so ist $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ die Definition der Ellipse, wenn man die Abscissen vom Scheitelpunkt A an rechnet.

§. 902. **Zusatz.** Wenn $y = 0$, so ist $x = 0$ oder $x = a$; denn unter der Bedingung daß $y^2 = 0$, ist auch $bx - \frac{bx^2}{a} = 0$, folglich $abx = bx^2$, welches wahr ist, wenn $x = 0$, aber auch wahr bleibt, wenn $x = a$; denn wenn man beederseits mit bx dividirt, so ist der Quotient $\frac{a}{1} = x$.

§. 903. **Zusatz.** Folglich wird die Axe zweymal von der Ellipse geschnitten, und die Abscissenlinie gehet nicht unendlich fort.

§. 904. **Zusatz.** Weil $y = \pm\sqrt{(bx - \frac{bx^2}{a})}$ so gehören zu jeder Abscisse zwo gleiche entgegengesetzte Semiordinaten.

§. 905. **Erklär.** Wenn die grose Axe AB in C in zween gleiche Theile getheilt wird, so heißt der Punkt C der Mittelpunkt und die Ordinate von C aus doppelt genommen die **kleinere Axe** = 2CD. *Fig.* 109. (Axis conjugatus).

§. 906. **Zusatz.** Weil die Abscisse $x = \frac{1}{2}a$, wenn y der halben kleinen Axe gleich ist, so darf man in der Gleichung nur für x überall $\frac{1}{2}a$ setzen, so hat man die kleine Axe; denn in diesem Fall $y^2 = \frac{1}{2}ba - \frac{1}{4}\frac{ba^2}{a} = \frac{1}{2}ba - \frac{1}{4}ba = \frac{1}{4}ba$; und $y = \frac{1}{2}\sqrt{ba}$. folglich $2y = \sqrt{ba}$.

§. 907. **Zusatz.** Man nenne 2y die kleine Axe

Axe $= c$, so ist $c^2 = ab$; und $\frac{c^2}{a} = b$; auch nach

§. 901. $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$.

§. 908. **Zusatz.** Wenn $c = a$, so ist $y^2 = ax - x^2$, die Gleichung für den Cirkel; in welchem Fall $c = a = b$, das ist, Parameter und beede Axen einander gleich sind.

§. 909. **Lehrsatz.** Wenn die Abscissen von dem Mittelpunkt an gerechnet werden, und eine solche Abscisse wie PC von C an gerechnet wird gesetzt $= u$, so ist die Gleichung für die Ellipse $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} = y^2$.

Bew.

$CP = u$ nach der Voraussetzung; folglich $x = AP = AC - CP = \frac{1}{2}a - u$. dahero nach §. 907. substit.

$$\frac{c^2}{a} \cdot (\tfrac{1}{2}a - u) - \frac{c^2}{a^2} \cdot (\tfrac{1}{2}a - u)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} = y^2.$$

§. 910. **Zus.** Auf beeden Seiten von C, zur Rechten und zur Linken, geben gleiche u einerley y, folglich wird die Ellipse in zwo gleiche Hälften in C getheilt.

§. 911. **Lehrs.** Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Producte aus den Segmenten der Axe.

Satz. *Fig.* 109.

$$FG^2 : PM^2 = AF \cdot FB : AP \cdot PB.$$

Bew.

$$FG^2 = b(AF - \frac{AF^2}{a}) \text{ u. } PM^2 = b(PM - \frac{PM^2}{a})$$

nach §. 901.

folgl. $FG^2 : PM^2 = b\left(AF - \frac{AF^2}{a}\right) : b\left(PA - \frac{PA^2}{a}\right)$

$$\text{---------------------------------------} : \frac{b}{a}$$

$= AF.a - AF^2 : PA.a - PA^2$

$= AF(a - AF) : PA(a - PA)$ d. i. in der Figur

$FG^2 : PM^2 = AF.FB : PA.PB.$

§. 912. Lehrsatz. Die Ellipse hat zween vom Scheitel gleich weit entfernte entgegengesetzte Brennpunkte, welche durch die halbe Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate der beeden Axen bestimmt werden.

Satz. *Fig.* 109.

$$CF = \pm\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

Bew.

$\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 CF^2}{a^2}$ nach §. 909. vergl. mit §. 895.

$\frac{1}{4}b^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ nach §. 906. folglich

$$\text{---------------------------------------}$$

$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 CF^2}{a^2}$ folgl. herüber gesetzt

$\frac{c^2 CF^2}{a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^4}{4a^2}$

$$\text{---------------------------------------} : \frac{c^2}{a^2}$$

$CF^2 = \frac{1}{4}\frac{c^2 a^2}{c^2} - \frac{a^2 c^4}{4a^2 c^2}$ das ist

$CF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ und daherv

$CF = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$

§. 913. Anm. Dieses ist die Weite der Brennpunkte vom Mittelpunkt: will man ihre Weite vom Scheitel wissen, so muß man noch $\frac{1}{2}a$ addiren.

§. 914. **Lehrsatz.** Die Summe zweyer Linien aus beeden Brennpunkten an einen und eben denselben Punkt der Peripherie der Ellipse gezogen, ist der grosen Axe gleich.

Satz. *Fig.* 109.

$$FM + fM = AB.$$

Bew.

es sey $FC = fC = e$. so ist, weil

$PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$; $Pf = Cf + PC = e + \frac{1}{2}a - x$

und $PF = CF - PC = e - \frac{1}{2}a + x$, folglich

$$PF^2 = e^2 - ae + \frac{1}{4}a^2 + 2ex - ax + x^2$$
$$= (\frac{1}{2}a - e)^2 + 2ex - ax + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + (4e^2x^2) : a^2$$

---

nr. I. $PF^2 + PM^2 = FM^2 = (\frac{1}{2}a - e)^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$ folgl.

$$FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$$

eben so ist

nr. II. $Pf^2 = e^2 + ae + \frac{1}{4}a^2 - 2ex - ax + x^2$
$= (\frac{1}{2}a + e)^2 - 2ex - ax + x^2$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

$PM^2 + Pf^2 = fM^2 = (\frac{1}{2}a + e)^2 - 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$ folgl.

$$fM = \frac{1}{2}a + e - \frac{2ex}{a}$$ aber

nr. I. $FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$ folgl. add.

$FM + fM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a = AB.$

§. 915. Anm. Eben dieser Beweis gilt von allen andern Linien; so ist FE und fE zusammen auch = a u. s. w.

§. 916. Lehrsatz. Eine jede Ellipse läßt sich mit der Parabel so vergleichen, daß man die Parabel eine Ellipse nennen kann, deren Axe unendlich ist. Das ist, je gröser a wird, desto geringer wird der Unterschied der Quadrate der beederseitigen Ordinaten. Denn es sey *Fig.* 109. AN das Stück einer Parabel, AM einer Ellipse, die gemeinschaftliche Abscisse AP = x, die Semiordinate der erstern PN = z, der andern PM = y; so ist

I. in der Parabel $z^2 = bx$

II. in der Ellipse $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ subtrahirt

$z^2 - y^2 = \frac{bx^2}{a}$ nun seye

$a = \infty$ so ist

$z^2 - y^2 = \frac{bx^2}{\infty}$ aber

$\frac{bx^2}{\infty} = 0$ vel quavis data minor quantitas.

$x^2 - y^2 = 0$.

§. 917. Anm. Weil die Axe niemal wirklich unendlich wird, so sagt man, der elliptische Bogen komme dem parabolischen immer näher, je gröser die Axe sey. Uebrigens hat man diesen Lehrsatz in der Astronomie nöthig, wann von den Laufbahnen der Cometen die Rede ist, die eine so eccentrische Laufbahn haben, daß man ihre Ellipse, darinn sie sich bewegen, ohne Fehler für eine parabolische Laufbahn annehmen kann.

Die Hyperbel.

§. 918. Erklär. Die Hyperbel ist diejenige conische Section, in welcher $y^2 = by + \frac{bx^2}{a}$, wenn

wenn die Buchstaben das bedeuten, was sie bey der Ellipse beditten haben. Denn man darf nur für die Gleichung in der Ellipse — a statt + a setzen, so hat man die obige Gleichung der Hyperbel; und in sofern kann man die Hyperbel als eine Ellipse von einer negativen Axe ansehen.

§. 919. **Zusatz.** Wenn $y = 0$, so ist x entweder $= 0$ oder $= -a$, wie §. 902. bey der Ellipse.

§. 920. **Zusatz.** Wenn man die kleine Axe auch nach der Aehnlichkeit der Ellipse ausdrucken wird, so heißt $\sqrt{-ab}$ eine unmögliche Gröse; folglich gibt es auf der Zwerchaxe, (so wird die Axe AB *Fig.* 110. axis transversus, genannt,) keine Semiordinate.

§. 921. **Zusatz.** Wenn die Abscisse negativ genommen gröser wird als die Zwerchaxe a, so gibt es auf der entgegengesetzten Seite wieder Ordinaten; denn $y^2 = \frac{bx}{a}(a + x)$ gibt ein positives Quadrat, weil hier die beede Factores x und $a + x$ negativ sind, folglich ihr Product positiv wird; dahero hat die Hyperbel vier unendliche entgegengesetzte Schenkel, weil x positiv und negativ unendlich wachsen kann.

§. 922. **Erklär.** Wenn man die Zwerchaxe AB in zween gleiche Theile theilet, so heißt C der **Mittelpunkt** der Hyperbel.

§. 923. **Zusatz.** Bildet man sich eine kleine Axe in der Hyperbel ein, die man wie bey der Ellipse $= c$ setzet, so ist nach §. 907. eine ähnliche Gleichung für die Hyperbel $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, da man nur statt — setzet +.

§. 924.

§. 924. **Zusatz.** Eben so, wenn die Abscissen von dem Mittelpunkt C an gerechnet werden, ist nach §. 909. mit einer ähnlichen Veränderung $y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

§. 925. **Zusatz.** Auf gleiche Weise sind kraft des Gegensatzes §. 912. die Brennpunkten der Hyperbel $= \mp \sqrt{\frac{(a^2 + c^2)}{2}}$, wenn man sie von dem Mittelpunkt c an rechnet.

§. 926. **Zusatz.** Endlich erhellet eben so aus §. 914. daß die Zwerchaxe immer der Differenz zweyer Linien aus den beeden Brennpunkten F und f, an einen Punkt der Hyperbel M gezogen, gleich sey, das ist $fM - FM = a$.

§. 927. **Erklär.** Die **Asymptoten** der Hyperbel sind aus dem Mittelpunkt gezogene Linien, welche den Schenkeln der Hyperbel sich unendlich nähern, und doch niemalen mit ihnen zusammen fallen, sondern immer einen Zwischenraum lassen.

Ihre geometrische Erklärung ist folgende: Man beschreibt *Fig.* 110. mit der Ordinate PM, Pm durch den Scheitelpunkt der Hyperbel A die Parallele DE, so, daß DA = AE = der halben kleinen Axe werden; wodurch man die Punkte D und E bestimmt erhält; aus dem Mittelpunkt C zieht man durch D und E die gerade Linien CDQ, CEQ so weit man will, so werden sie die Asymptoten seyn. Eben so können sie auch auf die entgegengesetzte Seite continuirt werden.

§. 928. **Lehrsatz.** Die Asymptoten fallen niemalen mit den Schenkeln der Hyperbel zusammen, weil die Differenz der Quadrate von den beeden Ordinaten PM und PR eine beständige Grösse, nemlich der vierte Theil des Products aus dem Parameter in die Zwerchaxe, d. i. des Quadrats der kleinen Axe, ist, welches Product niemalen null werden kann.

Satz.

Satz. *Fig.* 110.

$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}c^2$.

Bew.

Weil C der Mittelpunkt ist, so ist $CA = \frac{1}{2}a$; $CP = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$ und die halbe kleine Axe $DA = \frac{1}{2}\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ folglich

weil $CA : AD = CP : PR$ so ist in kleinen Buchst.

$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR$ also

$PR = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$ wenn man wirklich dividirt;

diß quadrirt gibt

$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + \frac{cx^2}{a}$ es ist aber nach §. 918.

$PM^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ subtr.

$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}c^2$.

§. 929. Anm. Der Name Asymptote ist aus dem Griechischen zu erklären; dem Wort nach ist sie eine Linie, die mit einer andern niemalen zusammen fällt; der Bedeutung nach muß man noch hinzusetzen: unerachtet sie sich derselben unendlich nähert. Aus dieser Aehnlichkeit hat Herr von Leibniz die endliche Geister Asymptoten von GOtt genannt.

§. 930. Lehrsatz. Wenn man *Fig.* 110. AI mit CD parallel ziehet, so ist $EI = CI = AI$.

Satz. *Fig.* 110.

$CI = EI = AI$.

Bew.

nr. I. $EA : ED = AI : DC$ aber

$EA : ED = \frac{1}{2} : 1$

$AI : DC = \frac{1}{2} : 1$ folgl. $AI = \frac{1}{2}DC$. aber

$\frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}CE$ daher

$AI = \frac{1}{2}CE$ nr. II.

nr. III.

nr. III. EA : AD = EI : IC aber
EA = AD folglich
EI = IC = ½ CE nach der Figur
aber nr. II. AI = ½ CE folglich
EI = IC = AI.

§. 931. Erklär. Das Quadrat von CI, das ist CI^2, heißt die Potenz der Hyperbel.

§. 932. Lehrsatz. Die Potenz der Hyperbel ist der sechszehende Theil von der Summe der Quadrate der beeden Axen.

Satz. *Fig.* 110.

$$CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

Bew.

$CE^2 = CA^2 + AE^2$ aber $CA = \frac{1}{2}a$, und $AE = \frac{1}{2}c$, folgl.
$CE^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$ und $CE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$
$CI = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ und quadrirt

$$CI^2 = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2) = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

§. 933. Lehrsatz. Die Linien zwischen den Asymptoten und Schenkeln der Hyperbel RM und rm sind gleich.

Satz. *Fig.* 110.

RM = rm.

Bew.

nr. I. $\frac{CA : AD = CP : PR}{\frac{AD \cdot CP}{CA} = PR.}$

nr. II. $\frac{CA : AE = CP : Pr.}{\frac{AD \cdot CP}{CA} = Pr}$

oder nr. II. $\frac{\frac{AD \cdot CP}{CA} = Pr}{PR = Pr}$

$\frac{PM = Pm \text{ subtr.}}{PR - PM = Pr - Pm}$ das ist in der Figur
RM = rm.

§. 934.

§. 934. **Lehrsatz.** Wenn man QM parallel mit CD ziehet, so ist CQ. QM der Potenz der Hyperbel gleich.

Satz. *Fig.* 110.

$$CQ.QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

Bew.

△RQM ∽ △RCr folgl.

CQ : Mr = QR : RM und weil △QRM ∽ △CDE

nr. I. QR : RM = DC : ED

ED ; DC = Mr : CQ; es sey Pr = z, so ist

Pr + PM = Mr = y + z

weil $DC^2 = CA^2 + AE^2$

und $DC = \sqrt{(CA^2 + AE^2)}$

$= \sqrt{\frac{(a^2 + c^2)}{2}}$

so ist in Buchst. $c : \sqrt{\frac{(a^2 + c^2)}{2}} = y + z ; CQ$

$$\frac{(y+z).(\sqrt{a^2 + c^2})}{2c} = C.Q.$$

nr. II. RM = z — y. nach nr. I. = PR — PM. aber

$z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2$ nach §. 928.

$z^2 - y^2 = (z+y).(z-y)$

$(z+y)(z-y) = \frac{1}{4}c^2 : z+y$

$$z - y = \frac{c^2}{4(z+y)} = RM.$$

nr. III. ED : EC = RM : MQ, d. i. weil EC = CD.

$$c : \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} = \frac{c^2}{4(z+y)} : MQ \text{ also}$$

$$MQ = \frac{c^2}{4(z+y)} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c} \text{ aber}$$

nr. I. $CQ = \frac{(y+z).\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c}$ diß mit einander multiplicirt, gibt

$$CQ.QM = \frac{(y+z).\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c} \cdot \frac{c^2}{4(z+y)} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$$

$$= \frac{(a^2 + c^2)c^2}{16c^2} = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

§. 935.

§. 935. Erklär. Wenn man CQ, QM als Coordinaten auf die Asymptoten annimmt, und setzt $CQ = p$, $QM = q$, so ist $pq = \frac{a^2 + c^2}{16}$ die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

§. 936. Zusatz. Ist die Potenz der Hyperbel $= 1$, so ist $pq = 1$, oder $CQ \cdot QM = 1$.

§. 937. Wenn $CA = AE$, so ist der Winkel $ACE = AEC$, und jeder $45°$; weil bey A ein rechter ist.

§. 938. Erklär. Die gleichseitige Hyperbel ist, deren beede Axen und Parameter einander gleich sind.

§. 939. Zusatz. In einer gleichseitigen Hyperbel ist der Asymptotenwinkel $DCE = 2ACE = 90°$, oder ein rechter Winkel; sie heißt dahero auch die rechtwinklichte Hyperbel.

§. 940. Zusatz. Weil die allgemeine Erklärung der Hyperbel $y^2 = ax + \frac{bx^2}{a}$, so ist für die gleichseitige, wo $a = b$, die Gleichung $y^2 = ax + x^2$.

§. 941. Zusatz. Wenn man die Abscissen vom Mittelpunkt an rechnet, und $CP = u$ gesetzt wird, so ist $AP = CP - AC$, das ist $x = u - \frac{1}{2}a$; folglich in der Fundamentalgleichung §. 923. der Wehrt von x substituirt, wo $y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$ aus der kleinern Axe, gibt $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

§. 942. Zusatz. Folglich gibt diese Gleichung für die gleichseitige Hyperbel $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Allge-

Allgemeine Betrachtungen der conischen Sectionen und Linien der zweyten Ordnung.

§. 943. Lehrsatz. In einer jeden conischen Section ist die gerade Linie aus dem Brennpunkt an einen beliebigen Punkt der Peripherie, der Distanz des Brennpunkts vom Scheitel und dem durch diese Distanz dividirten Product aus der Differenz des halben Parameters und der gedachten Distanz in die dem Punkt der Peripherie correspondirende Abscisse gleich. Das ist, wenn man mit dem Herrn Prof. Euler die Distanz AF = a, den halben Parameter = b nennet,

Satz. *Fig.* 108. 109. 110.

$$FM = a + \frac{(b-a)}{a} AP.$$

Beweis.

Nr. I. bey der Parabel.

Aus §. 898. ist klar, daß FM = AP + AF = a + AP; da nun in der Parabel die Distanz a = $\frac{1}{2}$b §. 896. wann man den gegenwärtigen Ausdruck mit dem daselbst gegebenen vergleicht, so ist

$$\frac{1}{2}b + \frac{b - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b} AP = \frac{1}{2}b + AP = a + AP.$$

Da dann für die Parabel $\frac{b-a}{a} = 1$ wird.

Nr. II. Für die Ellipse ist nach §. 914. FM = $\frac{1}{2}$a $- e + \frac{2ex}{a}$, wo a die Zwerchaxe, e die Distanz des Brennpunkts vom Mittelpunkt C, nemlich CF bedeutet; folglich ist $\frac{1}{2}$a − e = AC − CF = AF = der Distanz des Brennpunkts vom Scheitel

tel $= a$ nach dem Eulerischen Ausdruck; folglich $\frac{2ex}{a} = \frac{(b-a)}{a} \cdot x$. oder $\frac{2e}{a} = \frac{b-a}{a}$, daß nun diese Gleichung richtig erhellt aus der Figur: denn es sey

$$\frac{2FC}{AB} = \frac{b-AF}{AF} = \frac{FN-AF}{AF}$$ aber

nr. I. $\frac{2FC}{AB} = \frac{AB-2AF}{AP}$, u. weil $FN^2 = 2FN \cdot AF - \frac{2FN \cdot AF^2}{AB}$ §. 901.

folglich $FN = 2AF - \frac{2AF^2}{AB}$

$$= \frac{2AF \cdot AB - 2AF^2}{AB}$$

nr. II. so ist $\frac{FN-AF}{AF} = \frac{2AF \cdot AB - 2AF^2 - AF \cdot AB}{AB \cdot AF}$

$$= \frac{2AB - 2AF - AB}{AB}$$

$$= \frac{AB-2AF}{AB}$$

aber dieser Ausdruck ist nr. I. $\frac{2FC}{AB}$, dahero $\frac{2e}{a} = \frac{b-a}{a}$.

III. Fall. Eben so wird der Beweis für die Hyperbel nur mit veränderten Zeichen vorgetragen, weil in der Hyperbel $FM = e - \frac{1}{2}a + \frac{2ex}{a}$.

§. 944. Anm. Dieser Beweis kommt uns in der Astronomie zu statten, wo man die Linien aus der Sonne an die Laufbahnen der Planeten und Cometen allgemein ausdruckt, wie solches Herr Prof. Euler in seiner nova Theoria Planetarum & Cometarum angeführt, und den Beweis p. 10. gedachter Schrift supponirt hat. Wir haben dahero diesen allgemeinen Ausdruck für alle conische Sectionen um so weniger unerwiesen übergehen können, weil der Beweis sich faßlich und kurz vortragen läßt.

§. 945.

§. 945. **Erklär.** Die Abscissen und Ordinaten können in einer conischen Section nach Belieben und unter einem beliebigen Winkel angenommen, folglich aus ihren Gleichungen noch allgemeiner ausgedrucket werden; denn es seye *Fig.* III. $AP = x$, $PM = y$, und der Ordinatenwinkel $APM = \pi$; so ist die allgemeinste auf null reducirte Gleichung von dieser zweyten Ordnung, welches die erste der krummen Linien ist, und wenn die griechische Buchstaben beständige Grösen bedeuten, $o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$.

§. 946. **Zusatz.** Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = o$, und $\zeta = 1$, $\beta = -a$, so ist $o = -ax + y^2$, oder $ax = y^2$ die Gleichung für die Apollonische Parabel.

§. 947. **Lehrsatz.** Aus der obigen Gleichung §. 945. entsteht für y durch Substitutionen folgende Gleichung $y = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + \varphi x + \varrho} : 2\zeta$; und aus dieser läßt sich beurtheilen, ob eine gegebene Gleichung zu einer Parabel oder Ellipse oder Hyperbel gehöre.

Bew.

nr. I. Aus der Gleichung §. 945. ergibt sich leicht, wenn man nach §. 327. ordnet

$$\zeta y^2 + \gamma y + \varepsilon xy = -\alpha - \beta x - \delta x^2$$

das ist $\zeta y^2 + (\gamma + \varepsilon x)y =$

$$-\alpha - \beta x - \delta x^2 : \zeta$$

$$y^2 + \frac{(\gamma + \varepsilon x)y}{\zeta} = -\frac{\alpha - \beta x - \delta x^2}{\zeta}$$ eine

$$\frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{2\zeta} = \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{2\zeta}$$ nur quadr. Gleich. add. folgl. §. 321.

$$y + \frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} = \frac{\sqrt{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 - \beta x - \alpha)}}{2\zeta}$$

wenn man nemlich die Wurzel extrah. und auf der andern Seite alles unter einerley Benennung bringt.

$$y = -\frac{(\varepsilon x + \gamma)}{2\zeta} + \frac{\sqrt{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 - \beta x - \alpha)}}{2\zeta}$$

oder die Grösse hinter dem Wurzelzeichen wirkl. multipl.

$$+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon x x + 2\varepsilon x\gamma + \gamma\gamma - 3\zeta\delta x^2 - 4\zeta\beta x - 4\zeta\alpha)}$$

und diss Product geordnet nach §. 327.

$$+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + 2\varepsilon\gamma x + \gamma\gamma)} \quad - 4\zeta\beta x - 4\zeta\alpha;$$

man nenne die letzten Coefficienten u. Factores φ, ϱ, so ist

$$y = -(\varepsilon x + \gamma) + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + \varphi x + \varrho)}$$

mit dem gemeinschaftl. Divisor 2ζ; welches das erste zu beweisen war.

nr. II. Man nenne die Grösen hinter dem Wurzelzeichen z, und setze $x = \infty$, so werden für x^2 alle niedrigere Potenzen verschwinden, und also $z = (\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2$; denn x^2 ist in diesem Fall unendlichmal gröser als x, und noch weit mehr als φ, ϱ, u. s. w. welche nicht unendlich angenommen werden.

Wenn nun $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta > 0$, oder positiv ist, so gibt es wie §. 920. für positive und negative unendliche Abscissen, die durch x ausgedruckt werden, Ordinaten; folglich hat die krumme Linie vier unendliche Schenkel, und ist eine Hyperbel. Wenn aber $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta < 0$ oder negativ ist, so gibt es keine Ordinaten für unendliche affirmative oder negative Abscissen, also ist die krumme Linie eine Ellipse nach §. 902. Wenn endlich $\varepsilon\varepsilon = 4\zeta\delta$,

so

so sieht man schon, weil sonst nichts übrig bleibt, daß die krumme Linie eine Parabel ist, die zween unendliche Schenkel hat.

§. 948. Anm. Diese Betrachtung hat Herr Prof. Kästner mathem. Anfangsgr. III. Th. p. 235. angestellt; und es wird dem Leser nicht unangenehm seyn, daß wir die ihm beliebte Kürze etwas ausführlicher gemacht, und ihn dadurch in den Stand gesetzt haben, die Schlüsse sogleich zu überschauen.

§. 949. **Lehrsatz.** Aus dem gegebenen Ordinatenwinkel und der Lage der Coordinaten gegeneinander läßt sich ihre Gleichung allgemein finden.

Es sey *Fig.* III. die Lage der Coordinaten CQ, QM, folglich auch C gegeben; man setze BQ = t, QM = u; den Wink. APM = π, TCQ = γ BQM = x, folglich CTQ = 180 — C — Q

= 180 — γ — x.

PMT = μ = 180° — MPT — MTP

es ist aber MPT = 180° — π

μ = 180° — 180° + π — MTP.

MTP = γ + x

folgl. $\mu = \pi - \gamma - x$.

$$\text{sin. T} : \text{PM} = \text{sin. } \mu : \text{PT}, \text{ also PT} = \frac{\text{PM sin. } \mu}{\text{sin. T}}$$

$$\text{sin. T} : \text{CQ} = \text{sin. } x : \text{CT} = \frac{\text{CQ . sin. } x}{\text{sin. T}}$$

$$\text{sin. T} : \text{PM} = \text{sin. } \pi : \text{MT} = \frac{\text{PM . sin. } \pi}{\text{sin. T}}$$

$$\text{sin. } x : \text{CT} = \text{sin. } \gamma : \text{TQ} = \frac{\text{CT . sin. } \gamma}{\text{sin. } x}.$$

Wenn man nun die gefundene Wehrte substituirt, so lassen sich Gleichungen zwischen den neuen Abscissen u, t finden; wie man leicht auch in Rücksicht auf andere krumme Linien begreift.

§. 950. Anm. Diß ist das wichtigste von den conischen Sectionen, das wir vorzutragen gesonnen waren; mehreres gehört nicht hieher, unerachtet man ganze Folianten davon geschrieben hat. Diß eine wiederholen wir noch, daß man den Parameter in allen drey Sectionen aus den Figuren finden kann, wenn man die aus dem Brennpunkt gezogene rechtwinklichte Ordinate duplirt.

Von einigen andern, besonders auch transscendentischen Linien.

§. 951. Anm. Man wird ohne unser Erinnern begreiffen, daß es ausser den conischen Sectionen noch eine Menge von krummen Linien gebe, wovon einige mehr, die andere weniger brauchbar sind. Hieher gehören die verschiedene Quadratrices, die Cissois, die Conchois oder Muschellinien, die Spirallinien, die Radlinie oder griechisch Cyclois und Trochois, die Logistik u. s. w. unter diesen verdienen die beede letztere, nemlich die Logistik und die Cyclois vornemlich unsere Aufmerksamkeit; jene wegen den Logarithmen, diese wegen ihrem Nutzen in der Mechanik.

§. 952. **Erklär.** Wenn man *Fig.* 119. eine gerade Linie in so viel gleiche Theile theilet, als man will, und aus den Theilungspunkten A, O, P, N die Linien AB, OR, PM, NQ dergestalten ziehet, daß sie zu einander eine continuirliche geometrische Proportion haben, so heißt die krumme Linie BRMQ die **Logistik** oder die **logarithmische Linie.**

§. 953. **Zusatz.** Wenn AP, AN die Abscissen sind, so sind AB, PM die Ordinaten, folglich sind die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten; ist also eine Ordinate = y, die andere = z, so sind die correspondirende Abscissen ly, lz nach §. 299.

§. 954. **Zus.** AT oder die Abscissenlinie ist also zugleich die Asymptote der Logistik, weil PM niemal o wird, ausser wenn AT unendlich groß ist, indem alsdann AB : PM = 1 : o.

§. 955. **Erklär.** Die **Radlinie** (Cyclois, Roulette) *Fig.* 112. entsteht, wenn sich ein Rad

um

um seine Axe dergestalten herum bewegt, daß es sich im Bewegen fortwälzt, und durch diese Fortwälzung die krumme Linie FPQ beschreibet.

§. 956. **Zusatz.** Demnach ist der Bogen FLB der geraden Linie BQ gleich; und weil PL = y, FL = x gesetzt wird, so ist x = y die Gleichung für die Radlinie.

§. 957. **Erklär. Linien von höhern Ordnungen**, z. E. von der dritten, vierten, fünften Ordnung u. s. w. sind solche algebraische Linien, in welchen die höchste Potenz von x oder y, oder von beeden zugleich mehr als zwo Dimensionen haben, oder wenn Producte von x, y vorhanden sind, die mehr als zwo Dimensionen ausmachen.

§. 958. Anm. So ist die Cissois des Diocles; wo $ay = x^3 + xy^2$ eine Linie der dritten Ordnung. Sie läßt sich auch aus *Fig.* 61. bestimmen.

§. 959. **Erklär. Transscendentische Linien** sind solche Linien, in welchen sich keine bestimmte algebraische Gleichung geben läßt. Wenn z. E. zu einer Abscisse unendlich viel Ordinaten, oder umgekehrt zu einer Ordinate unendlich viel Abscissen, das ist, mehr, als man angeben kann, gehören, so ist, weil die Abscissen und Ordinaten x und y heissen, x eine transscendentische Function von y, und y eine transscendentische von x; zwischen welchen keine bestimmte Gleichung statt findet, indeme sie unendlich viel Dimensionen haben müßte, welches algebraisch unmöglich ist.

§. 960. **Zus.** Eine transscendentische Linie ist also eine Linie von einer höhern Ordnung als irgend eine möglich ist; und eine gerade Linie würde sie in unendlich viel Punkten schneiden; welches auch umgekehrt folget.

§. 961. Anm. Die Archimedeische Schnecken- oder Spirallinie, die niemalen aufhört, und ins Unendliche im Schnecken fortbeschrieben werden kann, ist also eine transscendentische Linie, dann eine gerade Linie würde sie in unendlich viel Punkten schneiden.

§. 962. **Zusatz.** Weil eine einzige Sehne unendlich vielen Bogen correspondirt, *Fig.* 51. z. E. die Sehne AB dem Bogen ADB, ferner auf der andern Seite dem Bogen AB, wieder ADB + ADBA; und AB + ABDA, u. s. w. ins Unendliche die Peripherie vervielfältigt, so gibt es zwischen den Sehnen und dem Bogen keine algebraische Gleichung, und der Bogen ist eine transscendentische Function von der Sehne.

§. 963. **Zusatz.** Eben so ist der Bogen eine transscendentische Function vom Sinus, Cosinus, der Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante, u. s. w. nach §. 697. 706.

§. 964. **Zusatz.** Weil jedem Sinus und jeder Sehne unendlich viele Ausschnitte, (Sectores) und unendlich viele Abschnitte (Segmenta circuli) zugehören, so gibt es auch zwischen dem Sector und der Sehne oder Sinus, und zwischen dem Segment und der Sehne oder Sinus keine algebraische Gleichung.

§. 965. **Lehrsatz.** Die unbestimmte Quadratur des Cirkels ist schlechterdings unmöglich.

Bew.

Zur unbestimmten Quadratur des Cirkels hat man eine Gleichung 1) zwischen der Sehne, oder Sinus, oder Cos. oder Tang. oder Cotang. oder Secante, oder Cosecante, oder Quersinus und dem Bogen nöthig; 2) zwischen diesen Linien und dem Sector; 3) zwischen

schen diesen Linien und dem Segment; kein viertes gibt es nicht. Aber in allen drey Fällen ist keine algebraische Gleichung möglich; weil die zu den gemeldten Linien gehörige Bogen, Sectores und Segmente transscendentische Functionen von ihnen sind. Folglich ist die unbestimmte Quadratur des Cirkels schlechterdings unmöglich.

§. 966. Anm. Daraus aber folgt noch nicht, daß zwischen einem gewissen bestimmten Bogen, z. E. dem Bogen von 60° oder 45° u. s. w. und seinem Sinus oder Tangenten keine Vergleichung sich finden lasse; wiewohl man bisher noch keine gefunden hat, und vielleicht vergeblich sucht. Weitere Erläuterung findet man in Herrn Prof. Eulers Analys. Infin. L. II. §. 340.

§. 967. Anm. Weil die Radlinie die unbestimmte Rectification des Cirkels voraussetzt, so ist auch diese transscendentisch; und eine gerade Linie wie *Fig.* 113. würde sie in unendlich vielen Punkten schneiden.

Die geometrische Oerter und die Construction der Gleichungen.

§. 968. Erklär. Eine Linie, durch welche eine unbestimmte Aufgabe aufgelöst wird, heißt ein **geometrischer Ort** (Locus); diejenige geometrische Oerter, welche durch eine gerade Linie, und unter den krummen durch den Cirkel aufgelöst werden, heissen loca plana; was durch die Linien der zweyten Ordnung, den Cirkel ausgenommen, sich auflösen läßt, heißt man loca solida; weitere Kenntniß hatten die Alten nicht, und die Linien höherer Ordnung hiessen sie loca linearia.

§. 969. Anm. Diese Materie gehört also nur in sofern hieher, daß man die Bemühungen der Alten historisch verstehen lerne, und die Namen auch wisse, die man vorzeiten diesen Linien gegeben. Denn heutzutag sind sie, wie die Constructionen der Gleichungen, weder in der Ausübung, wie schon Wolf Elem. Lat. T. I. §. 608. Analys. fin. anmerkt, noch auch in der Theorie

von einigem Nutzen; ich habe auch davon in meinen ersten Gründen aller mathem. Wissensch. S. 524 — 527. und 200. folgg. gehandelt.

§. 970. Erklär. Wenn man *Fig.* 120. die zwo krumme Linien AMß und DMN mit einander vergleichen will, so sucht man den Ort M, wo ihre Abscissen eine gemeinschaftliche Ordinate haben, welche PM ist, und diese heißt die **Gleichung der Wurzel**; man kann auch eben so die gemeinschaftliche Abscisse suchen. Eine solche Verzeichnung nun heißt die Construction der Gleichung, durch welche man die Linien findet, welche die Wurzeln der Gleichung vorstellen.

§. 971. Anm. Man hat sie vorzeiten zu Gleichungen, die mehr als zwo Dimensionen haben, besonders gebraucht. Baker gab sich insbesondere Mühe, eine Regel davon festzusetzen, in welcher er die Verbindung des Cirkels und der Parabel angerathen hat. Newton hat dagegen gründliche Erinnerungen gemacht, und die Cirkel und Ellipse vorgeschlagen, weil es nicht darauf ankommt, ob die Gleichung einer krummen Linie einfacher sey oder nicht, sondern ob sie sich leicht zeichnen lassen; denn man will die Wurzeln durch Zeichnen finden; nun läßt sich die Ellipsis viel leichter als die Parabel beschreiben; dahero diese Verbindung vorzuziehen. Sonst müßte man auch die Parabel dem Cirkel vorziehen, weil die Gleichung der Parabel einfacher als des Cirkels ist; jedermann aber würde es für ungeräumt halten, wenn man bey einer Construction der Gleichung die Parabel dem Cirkel vorzöge. Die ganze Arbeit aber ist heutzutag entbehrlich, weil man durch Rechnung die Wurzeln viel genauer finden kann, als durch diese Zeichnung; die Alten, denen das Delische Problem und die Trisectio anguli so nahe lag, wurden durch Noth dazu gedrungen, weil sie die Kunstgriffe, mit welchen wir heutzutag unsere Rechnungen vollführen, nicht hatten. Sie haben sich auch darinn geirret, daß sie die beede Aufgaben durch den Cirkel und gerade Linien auflösen wollten; indeme die Trisectio anguli auf eine cubische Gleichung führt, welche schon durch zwo krumme Linien construirt werden muß. Cartesius hat die Construction der cubischen und biquadratischen Gleichung zuerst gelehrt, dahero es kein Wunder war, daß die Alten in der Auflösung gedachten Problems nicht wohl zurecht kamen. Von dem

dem Delischen Problem haben wir schon §. 632. in der Elementargeom. gehandelt, was aber die Trisection des Winkels betrifft, so wird man sich noch aus §. 770. Trigon. erinnern, daß man den vielfachen Winkel finden kann; denn weil das vielfache entsteht, wenn man das einfache immer zu sich selbst addirt, so darf man nur, wenn der Sinus = a, Cosinus = b, in dem Ausdruck §. 742. immer setzen d = a, ∂ = b; und für das doppelte m = a, μ = h so ist des doppelten Winkels Sinus = 2ab, und sein Cosinus $b^2 - a^2$; wenn man iezo nur m = 2ab, und μ = $b^2 - a^2$ setzet, so ist des dreyfachen Winkels Sinus nach eben diesem §. = $a(b^2 - a^2) + b \cdot 2ab = 3ab^2 - a^3$. Hieraus suche man den Sinus des dritten Theils, weil der ganze Winkel dreymal so groß als sein Drittheil: denn es sey x = $3ab^2 - a^3$ der Sinus des ganzen Winkels; folgl. $a^3 - 3ab^2 + x = 0$; man setze $b^2 = 1 - a^2$ nach §. 701. so ist $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}x = 0$; eine cubische Gleichung. Ist der gegebene Winkel ein rechter, so ist x = 1, folgl. $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} = 0$, und a = $\frac{1}{2}$; welches auch aus der Trigon. §. 768. erhellt; weil $\frac{1}{2}$ = sin. 30°, nach §. cit. aber 30° = $\frac{1}{3} \cdot 90$.

§. 972. Anm. Man könnte auch hier noch was von der Cardanischen Regel sagen, die cubische bestimmte Gleichungen aufzulösen: da nemlich die Wurzeln aus $x^3 - ax + b = 0$ dem allgemeinen Ausdruck für alle cubische Gleichungen, wo das zweyte Glied weggeschafft worden §. 347. zu geben gelehret wird. Cardan hat sie 1570 in seiner arte magna de regulis Algebraicis bekannt gemacht. Da sie aber nach dem Zeugniß der größten Mathematikverständigen von sehr wenigem Gebrauch ist, und nur wegen den seltsamen Bemühungen, die sich in vorigen Zeiten die Algebraisten damit gegeben, angemerkt zu werden verdient: so können wir sie übergehen. Herr Prof. Kästner hat sie ausführlich erklärt math. Anfgr. T. III. §. 699–724. aber nur blos wegen den seltsamen Bemühungen der Algebraisten über diese Regel: welchen Umstand er zur Entschuldigung anführt. Denn sonst haben wir weit bequemere Methoden, sowohl die rationale als irrationale Wurzeln zu finden. Zum Ueberfluß will ich doch eine Auflösung der cubischen bestimmten Gleichungen durch die sogenannte Cardanische Regel geben, um so mehr als ich etlich mal über Hr. Kästners Auflösung §. 699. IV. Th. Anfgr. von einigen lehrbegierigen Freunden aus der Ferne gefragt wurde, daher ich hier für alle auf einmal die Erläuterung geben kann. Der allgemeine Ausdruck für jede cubische Gleichung ist, nach Wegschaffung des zweyten Gliedes, $x^3 = ax + b$. Nun setze man $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

ferner

ferner sollen A und B die beeden Wurzeln folgender quadratischen Gleichung $z^2 = \alpha z - \beta$ seyn; welches alles möglich ist, wie ein jeder leicht siehet. Es wird also nach dem Hariotischen Lehrsatz $A + B = \alpha$, und $A.B = \beta$; denn die Gleichung $z^2 - \alpha z + \beta$ hat zwey Wurzeln A und B, deren Summe $A + B$ der Coefficient vom zweyten Glied z, daher eben dieser Coefficient $\alpha = A + B$, und deren Product $A.B$ das dritte Glied ist, daher das dritte Glied $\beta = A.B$ seyn muß, nach dem schon angeführten Lehrsatz.

Nun erhebe man $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ zur dritten Potenz, so ist nach den ordentlichen Regeln des binomischen Lehrsatzes

$$x^3 = A + 3\sqrt[3]{A}A.B + 3\sqrt[3]{A}.B.B + B;$$ und schicklicher ausgedrückt,

$$x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{A}.B.(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})$$ aber

$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = x$, folglich

$x^3 = 3x\sqrt[3]{A.B} + A + B.$ aber es ist zuerst gesetzt

$x^3 = ax + b.$ folglich

$ax + b = 3x\sqrt[3]{A.B} + A + B.$ dahero nach den correspond. Gliedern

$a = 3\sqrt[3]{A.B}$ und $b = A + B.$ Wir fanden aber oben, aus der Hariotischen Regel, daß $A + B = \alpha$, und $A.B = \beta$, folglich ist $\alpha = 3\sqrt[3]{\beta}$ und $b = \alpha$; also die quadratische obige Gleichung $z^2 = \alpha z - \beta$ wird sich in folgende verwandeln

$$z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$$ (denn was das letzte Glied betrifft, so wird, weil $a = 3\sqrt[3]{\beta}$ nach geschehener Division $\frac{a}{3} = \sqrt[3]{\beta}$ und Cubirung $\frac{a^3}{27} = \beta$). Nun lassen sich die Wurzeln geben, denn es ist $z = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3)}$ den unter dem Wurzelzeichen befindlichen irrationalen Ausdruck setze man $= c$, so ist $A = \frac{1}{2}b + c$, $B = \frac{1}{2}b - c$. und folglich nach dem zuerst gesetzten Ausdruck $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + c)} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b - c)}$. Das ist genug zur Erläuterung der Regel und Auflösung; die weitere Rechnung in den Kästnerischen Anfangsgründen §. 700 folgg. ist leicht

leicht, und kann nun selbst ohne weitere Beyhülfe nachgelesen und calculirt werden.

Allgemeine Gründe der Differentialrechnungen.

§. 973. Erklär. Wenn eine Gröse nach und nach kleiner wird als eine jede angebliche Gröse (quavis data minor), so nimmt sie unendlich ab, oder **verschwindet**, (quantitas evanescens); eine solche verschwindende Gröse heißt das Differentiale, und die Verhältniß, in welcher sie verschwindet, die Verhältniß der Differentialen.

§. 974. Lehrsatz. Wenn $a^{n-1}Z = z^n$, so ist die Verhältniß der Differentialien davon, die wir E und e nennen wollen $= \frac{E}{e} = \frac{nZ^{n-1}}{a^{n-1}}$.

Bew.

Es werde aus Z nach §. 235. $Z + E$, und aus z werde $z + e$, so ist

$a^{n-1}(Z+E) = (z+e^n)$ das ist nach §. 220.

$a^{n-1}Z + a^{n-1}E = z^n + nz^{n-1}e + \frac{n.n-1}{1.2}z^{n-2}e^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1\ 2\ 3}z^{n-3}e^3 +$

da nun $a^{n-1}Z = z^n$

——————————— subtr.

so ist $a^{n-1}E = nz^{n-1}e + \frac{n.n-1}{1.2}z^{n-2}e^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^{n-3}e^3 +$

——————————————————————— : e

a^{n-1}

$$a^{n-1}\frac{E}{e} = nz^{n-1} + n.n-1\,.\,z^{n-2}e + n.n-1.n-2z^{n-3}e^2$$

$$a^{n-1}\frac{E}{e} = nz^{n-1}$$

$$\frac{E}{e} = \frac{nz^{n-1}}{a^{n-1}}$$

wenn nun e unendlich klein, so sind alle in e multiplicirte Glieder gegen nz^{n-1} unendlich klein und verschwinden, oder vielmehr wird sich der Wehrt der Reyhe ohne Ende der Grenze nz^{n-1} nähern, folgl. wird in geom. Schärfe wie §. 199. auch hier seyn die obige Verhältniß.

§. 975. **Zusatz.** Wenn $a = 1$, so ist $a^{n-1} = 1$; und $\frac{E}{e} = nz^{n-1}$ und $E = nz^{n-1}e$; aber E ist das Differentiale von z^n, folglich ist $nz^{n-1}e$ das Differentiale von z^n.

§. 976. **Zus.** Nennet man nach der teutschen Mathematikverständigen willkührlicher Benennung $e = dz$, so ist also Diff. $z^n = nz^{n-1}dz$.

§. 977. **Zusatz.** Das Diff. von x^2 ist also $2xdx$, das von $x^3 = 3x^2dx$, das von $x^r = rx^{r-1}dx$.

§. 978. **Anm.** Die Engländer legen die Methode der Fluxionen zu Grunde; es sey *Fig.* 1. $AB = x$, $BC = y$, und vx bedeute die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt B die Linie AB beschreibt, vy die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt C die Linie BC beschreibt; nach Verfliessung einer willkührlichen Zeit, die endlich seyn mag, werde aus dem Rechteck AC das ähnliche Rechteck AE; man suche also die Geschwindigkeit, mit welcher das ganze Rechteck sich verändert hat. Das Rechteck heißt $AB.BC = xy$. Nun fragt man, wie geschwinde $BC = y$ fortrücken müsse, daß die Gleichheit immer erhalten, und das wachsende Rechteck in allen Zeittheilen sich gleich und dem vorigen ähnlich bleibe; so wird man antworten, mit der Geschwindigkeit des Punkts $B = vx$; eben so wird sich die Linie $AB = x$ mit der Geschwindigkeit des Punkts $C = vy$ bewegen; demnach ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das ganze Rechteck verändert

$= v$

$= v(xy) = y \cdot vx + x \cdot vy$. Denn wenn sich diese beede Linien mit einer andern Geschwindigkeit bewegten, so würde die eine früher oder später als die andere an den Ort kommen, wohin man sie haben will; wenn sich aber x mit der Geschwindigkeit von y und y mit der Geschwindigkeit von x bewegt, so bleibt das Rechteck sich immer gleich, und seinem vorigen Zustand ähnlich; also ist die Geschwindigkeit, mit der sich das ganze Rechteck verändert $xvy + yvx$; ohne daß man nöthig hätte, etwas entweder als unendlich klein anzusehen, oder gar für ein absolutes Nichts wegzuwerfen. Sind die Linien AB, BC gleich, so ist $x = y$, und die Geschwindigkeit beederseits vx, also, weil $xy = y^2$ die Geschwindigkeit des veränderten Quadrats $xvx + xvx = 2xvx$; wäre es ein Cubus, so ist die Geschwindigkeit seiner Veränderung, weil die ganze Flächen $= x^2$ sich verändern, $= 3x^2 vx$; denn aus x^2 wird $2xvx$, $= 2x^{2-1}vx$, aus x^3 wird $3x^2 vx = 3x^{3-1}vx$; und aus x^n wird $nx^{n-1}vx$.

§. 979. Anm. Die Teutschen nennen die Räume, welche mit den Geschwindigkeiten würden beschrieben werden, wie auch die Geschwindigkeit selbst, die Differentialgrösen; folglich ist die Fluxionenrechnung von der Differentialrechnung unterschieden, unerachtet sie auf einerley Rechnung hinaus führt.

§. 980. Anm. Will man, wie die gewöhnlichste Art in Teutschland sich auszudrucken ist, nach den Wolfischen Elementen die Differentialen mit Sandstäublein, die man bey Messung eines Berges ohne Gefahr zu irren, weglassen darf, oder nach der Lehre anderer mit absoluten Nullen, die gar keine Grösen haben, vergleichen, so wird abermal einerley Rechnung im Erfolg herauskommen, unerachtet alle diese Gründe der Rechnung von einander verschieden sind. Wir überlassen die Wahl der Gründe den Lesern, indem uns genüget, nach der alten Euclideischen Art die Verhältniß auf Ausdrücke, die kleiner als jede angebliche Grösе sind, gebracht zu haben, wie solche auch Newton selbst als rationes primas & ultimas betrachtet hat. Wenigstens scheinet uns der angeführte Grund §. 200. am meisten überzeugend zu seyn. Eine weitere Ausführung, besonders auch in Rucksicht auf die Fluxionenmethode, findet man in den Kästnerischen Anfangsgr. T. IV. S. 1—28. doch ist von dem Wesentlichen nichts von uns übergangen worden.

Die

Die Anwendung der Differentialrechnung auf die vier Rechnungsarten, in poſitiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen, auch Wurzeln, Potenzen und zuſammengeſetzten Grösen.

§. 981. **Willkührl. Satz.** Die Differentialgrösen werden durch den Buchſtaben d angezeigt; das Differentiale von x iſt dx, das von z, dz, das von y iſt dy. Die Engländer bedienen ſich ſtatt des d eines Punkts; z. E. ẋ, ẏ, u. ſ. w. wir werden uns immer des erſten Ausdrucks bedienen.

§. 982. **Lehrſatz.** Die Addition und die Subtraction, das iſt, die Summe und die Differenz der veränderlichen Grösen, wird mit einerley Zeichen durch bloſe Verbindung mit dem d ausgedruckt; aber wann unveränderliche Grösen dabey ſind, ſo iſt das Differential eben das, welches es wäre, wenn keine unveränderliche Grösе dabey wäre.

Beweis.

Erſter Fall.

Es ſey $Z = u + x - y$ ſo iſt

$Z + dZ = u + du + x + dx - y - dv$

folgl. $dZ = du + dx - dy$.

Zweyter Fall.

$Z = u + a$

$Z + dZ = u + du + a$

$dZ = du$.

§. 983. **Zuſatz.** Man kann alſo ſagen, das Differential einer unveränderlichen Grösе ſey $= 0$; oder beſſer, es hat keines; denn was unveränderlich iſt, kann weder gröſer noch kleiner, alſo auch nicht unendlich klein werden.

§. 984. **Zusatz.** Wenn zwo veränderliche Grösen zusammen einer unveränderlichen gleich sind, so muß die eine abnehmen, wenn die andere wächßt, oder umgekehrt: denn wenn sie beede wachsen oder abnehmen, so kann ihre Summe in allen Umständen nicht unveränderlich seyn. Folglich werden die Differentiale in diesem Fall entgegengesetzt, das eine positiv, das andere negativ: denn es sey $x + y = a$; so ist $dx + dy = 0$, und $dx = -dy$; oder $dy = -dx$.

§. 985. **Lehrsatz.** Das Differential des Products xy ist die Summe aus den Producten jeden Factors in das Differential des andern.

Satz.

$$\text{diff. } (xy) = xdy + ydx.$$

Bew.

Es sey $xy = Z$ so ist $4Z = 4xy$. aber

$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ weil, wenn man wirklich quadrirt, herauskommt nach §. 145.

$x^2 + 2xy + y^2$
$x^2 - 2xy + y^2$
$- + \quad -$
folgl. subtr.
$+ 4xy.$

$4Z = (x+y)^2 - (x-y)^2$ es sey

I. $x + y = u$ I. $x - y = v$. so ist

$dx + dy = du$ $dx - dy = dv$

II. $(x+y)^2 = u^2$ II. $(x-y)^2 = v^2$

folgl. $d(x+y)^2 = 2udu$ §. 977. $d(x-y)^2 = 2vdv$ §. 977.

aber $2udu = 2(x+y).(dx+dy)$ $\quad 2vdv = 2(x-y).(dx-dy)$

wenn man nemlich die Wehrte von u und v substituirt.

folgl. $4dZ = 2(x+y).(dx+dy) - 2(x-y)(dx-dy)$
$= 2udu - 2vdv$

$:2$

$2dZ = (x+y)(dx+dy) - (x-y)(dx-dy)$

u. wenn man wirkl. multiplicirt und subtrahirt

$= xdx + ydx + xdy + ydy$
$= xdx - ydx - xdy + ydy$
$= \quad + \quad + \quad -$

$2dZ = 2ydx + 2xdy$

$:2$

$dZ = ydx + xdy.$

§. 986. **Zusatz.** Eben so ist $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$; da allemal das Product je zweyer Factorum in das Differentiale des dritten multiplicirt, und die Summe addirt wird. Hieraus läßt sich das Diff. (xyvz) auf eine ähnliche Weise finden, wenn man nur je drey Factores in das Diff. des vierten multiplicirt.

§. 987. Anm. Den obigen Lehrsatz §. 985. und Beweis findet man in den Kästnerischen Anfangsgründen; in den Wolfischen Elementen steht der bekannte, daß $(x+dx)(y+dy)$ gibt $xy + xdy + ydx + dxdy$; also die Differenz, wenn xy weggenommen wird $= xdy + ydx + dx\,dy$; aber $dx\,dy$ kann als eine gegen ydx wie nichts zu rechnende Gröse weggeworfen werden; folglich ist das Diff. $xy = xdy + ydx$, aber nur beynahe wahr; weil dxdy doch noch etwas ist. Ist aber nach anderer Meynung dxdy, wie ich selbst vor zehen Jahren in meiner Lettre sur quelques paradoxes du Calcul gesetzet habe, ein absolutes Nichts, so müßten auch xdy und ydx nichts werden, denn eine positive Gröse mit null multiplicirt, gibt allemal Null. Man mag inzwischen

zwischen die Sachen betrachten wie man will, so sind die Folgen der Rechnung gewiß und richtig.

§. 988. **Lehrsatz.** Das Differentiale des Quotienten ist das Product des Divisors in das Differentiale des Dividendus, weniger dem Product des Dividendus in das Differentiale des Divisors, zusammen dividirt durch das Quadrat des Divisors.

Man solle z. E. $\frac{x}{y}$ differenziren, so ist

Satz.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Bew.

Es sey $\frac{x}{y} = v$ so ist

$x = vy$ also

$dx = vdx + ydv.$ und

$dx - vdy = ydv.$

$:y$

$\frac{dx - vdy}{y} = dv.$ u. den Wehrt von v substit.

$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y.y} = dv = d\left(\frac{x}{y}\right)$ unter einerley Benennung

$\frac{ydy - xdy}{y^2} = dv.$

§. 989. **Lehrsatz.** Das Differentiale von einer Wurzelgröse, wo die Exponenten negativ oder positiv, ganze oder gebrochene Zahlen seyn können, läßt sich bestimmen.

I. Satz.

$\sqrt[u]{u^m}$ das ist

$u^{\frac{m}{n}}$ läßt sich differenziren

II. Satz.

v^{-r} läßt sich differenziren

Bew.

$v^{-r} = \frac{1}{v^r}$ §. 180.

Bew.

$u^{\frac{m}{n}} = w$ man setze so ist

$u^m = w^n$ und

$mu^{m-1}du = nw^{n-1}dw$

da aber $w = u^{\frac{m}{n}}$. also

so ist $mu^{m-1}du = nu^{\frac{m(n-1)}{n}} dw$

$mu^{m-1}du = dw$. d. i.

$nu^{\frac{m.(n-1)}{n}} = nu^{\frac{mn-m}{n}}$

$= nu^{m\frac{m}{n}}$ subtr.

$\frac{m}{n} u^{\frac{m}{n}-1}du = dw$.

nun sey $\frac{1}{v^r} = y$ so ist

$1 = yv^r$ differenz.

$0 = y . rv^{r-1}dv + v^r dy$

$-ryv^{r-1}dv = v^r dv$ und

$-ryv^{r-1}dv = dy$. d. i. §. 175.

$-ryv^{-1}dv = dy$.

$y = \frac{1}{v^r} = v^{-r}$ subst.

$-rv^{-r-1}dv = dy$.

§. 990. **Zusatz.** Aus dem ersten Satz erhellet, daß man Potenzen von gebrochenen, Exponenten, und aus dem andern, daß man Potenzen von negativen Exponenten differenziren könne; folglich ist die Differentiationsregel auf alle auch Irrationalgrösen, die man als Brüche betrachten kann, anzuwenden.

§. 991. **Zusatz.** Aus dem Verfahren §. 989. siehet man, daß bey Potenzen von ganzen, gebrochenen und negativen Exponenten, folglich auch bey allen Wurzelngrösen die Differentiation geschiehet, wenn man den Exponenten um eins vermindert, und hernach mit dem Product aus dem unveränderten Exponenten in das Differentiale der veränderlichen

Grös

Grösse alles multiplicirt. So ist $\sqrt[r]{x^3} = x^{\frac{3}{r}}$ differenzirt $= \frac{3}{r} x^{\frac{3-r}{r}} dx$; und $d(\sqrt[3]{x^r}) = d(x^{\frac{r}{3}}) = \frac{r}{3} x^{\frac{r-3}{3}} dx$.

§. 992. **Lehrsatz.** Potenzen und Wurzeln von zusammengesetzten veränderlichen und unveränderlichen Grösen lassen sich differenziren.

Satz.

$\sqrt{(aa - xx)}$ läßt sich differenziren.

Bew.

Es sey $\sqrt{(aa - xx)} = y$. so ist

$aa - xx = y^2$

——————— diff.

$-2xdx = 2ydy$ oder

———————— : 2

$-xdx = ydy$.

———————— : y

$\frac{-xdx}{y} = dy$ aber es ist $y = \sqrt{aa - xx}$ gesetzt,

folgl. $\frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}} = d(\sqrt{aa - xx})$.

§. 993. Anm. Eben so differenzirt man $\sqrt{ax - xx}$, und das Differentiale ist $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - xx)}}$; wie leicht erhellet, wenn man den obigen Ausdruck $= y$ setzt; und wie vorher calculirt; überhaupt werden durch die Substitutionen viele Vortheile im Differenziren und Integriren gefunden, wie im folgenden vorkommt; dieser letzte Lehrsatz, der doch nöthig war, ist in den meisten Compendien bey der Lehre vom Differenziren bisher übergangen worden.

Allgemeiner Beweis des Newtonischen Binomii und des Harriotischen Lehrsatzes.

§. 994. Anm. Bey dem Newtonischen Binomio kommt es nur darauf an, daß man die Coefficienten bestimme;

denn daß die Potenzen von a ab- und die von b in eben der Ordnung zunehmen müssen, ist schon §. 217. unumstößlich erwiesen. Der Beweis wird also nur auf die Coefficienten gehen, wie wir ihn jezo vortragen.

§. 995. **Lehrsatz.** In dem Newtonischen Binomio sind die Coefficienten, wenn der Exponent n ist, $1, \frac{n.}{1}, \frac{n.n-1.}{1.2}, \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ u. s. w.

Beweis.

Man nenne die Coefficienten A, B, C u. s. w. so ist nach §. 217.

nr. I. $(a+x)^n = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 + Ca^{n-3}x^3 \ldots$

die Reyhe heisse $= S$, so ist

$(a+x)^n = S$. dieser Ausdruck differenzirt gibt

$n(a+x)^{n-1}dx = dS$ nach §. 976.

$(a+x)^n = S$ man dividire damit, so ist

$\frac{ndx}{a+x} = \frac{dS}{S}$ nach §. 175.

$ndx = (a+x)\frac{dS}{S}$. $a+x$

$nSdx = (a+x)\,dS$. S

$nS = (a+x)\frac{dS}{dx}$: dx

und

$o = (a+x)\frac{dS}{dx} - nS.$

diesen Wehrt muß man in der Reyhe nr. I. substit. denn es ist

$S = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2$ - - - und

$dS =$

$dS = 0 + Aa^{n-1}dx + 2Ba^{n-2}xdx + 3Ca^{n-3}x^2dx \ldots$

$\frac{dS}{dx} = 0 + Aa^{n-1} + 2Ba^{n-2}x + 3Ca^{n-3}x^2 \ldots$ | $a+x$

$(a+x)\frac{dS}{dx} = 0 + Aa^n + 2Ba^{n-1}x + 3Ca^{n-2}x^2 + 4Da^{n-3}x^3$

$Aa^{n-1}x + 2Ca^{n-2}x^2 + DCa^{n-3}x^3$

$-nS = -na^n - nAa^{n-1}x - nBa^{n-2}x^2 \ldots$

$(a+x)\frac{dS}{dx} - nS = 0 + (Aa^n - na)^n + 2Ba^{n-1} \mid +3Ca^{n-2}$

$+Aa^{n-1} \mid x + 2Ba^{n-2} \mid x^2$

$-nAa^{n-1} \mid -nBa^{n-2}$

Da nun diß alles $= 0$, aber x nicht null, so ist ein jeder von den Coefficienten $= 0$, folglich

I. $Aa^n - na^n = 0.$

$Aa^n = na^n$ | $: a^n$

$A = n.$

II. $2Ba^{n-1} + Aa^{n-1} - nAa^{n-1} = 0$ | $: a^{n-1}$

$2B + A - nA = 0$ und

$2B + nA - A = (n-1)A.$ aber nr. I. $A = n.$

$2B = n.n-1.$ | $: 2$

$B = \frac{n.n-1}{1.2}$

III. $3Ca^{n-2} + 2Ba^{n-2} - nBa^{n-2} = 0$ | $: a^{n-2}$

$3C + 2B - nB = 0$

$$3C = nB - 2B = (n-2)\,B;\ \text{aber}\quad B = \frac{n.n-1}{1.2}$$

$$3C = \frac{n.n-1.n-2}{1.2}$$

$$C = \frac{n.n-1.n.2}{1.2.3}\ :3 \qquad \text{u. s. w.}$$

§. 996. Anm. Diesen Beweis habe in meiner Lettre sur quelques paradoxes du Calcul a. 1753. und hernach in meinen ersten Gründen aller mathematischen Wissensch. 1759. gegeben. Herr Prof. Kästner gab einen völlig ähnlichen 1758. in einem Progr. unter dem Titel: Theorema binomiale universaliter demonstratum heraus. Warum ein so allgemeiner Beweis nöthig sey, haben wir §. 215. schon gemeldt; denn man siehet daraus, daß man das binomial Theorema auch bey gebrochenen und negativen Exponenten sicher gebrauchen darf.

§. 997. Anm. Was den Harriotischen Lehrsatz betrifft, so kommt es nur auf die Frage an, warum die Wurzeln, wenn sie alle möglich sind, bejaht seyen, woferne die Zeichen abwechseln, und verneint, woferne sie ohne Abwechslung folgen; denn das übrige vom Harriotischen Lehrsatz ist §. 332. richtig erwiesen.

§. 998. **Lehrsatz.** So viel in einer quadratischen Gleichung Abwechslungen der Zeichen sind, so viel hat sie affirmative Wurzeln; und so viel Folgen der Zeichen sind, so viel hat sie negative Wurzeln.

Beweis.

Es gibt bey quadratischen Gleichungen nicht mehr als folgende vier Formen, nach den Combinationsregeln; weil x^2 allemal das Zeichen + hat. §. 209.

Quadrate.

I. $x^2 + px + q$. hat zwo Folgen;

II. $x^2 - px + q$. zwo Abwechslungen;

III.

III. $x^2 + px - q$.
eine Folge u. eine Abwechsl.

IV. $x^2 - px - q$.
eine Folge u. eine Abwechsl.

Wurzeln.

I. $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$
zwo negative Wurzeln.

II. $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$.
zwo affirmative Wurzeln.

III. $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$
eine positive und negative.

IV. $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.
eine positive und negative.

§. 999. Anm. Weil die cubische Gleichung differenzirt eine quadratische wird, aber von einer quadratischen der Lehrsatz erwiesen, so gilt er auch von den cubischen; und weil die biquadratische differenzirt die cubische wird, so gilt der Schluß auch von der biquadratischen und so fort von allen hohen Gleichungen.

§. 1000. Anm. Eine allgemeine cubische Gleichung läßt sich ausdrucken $x^3 \mp qx + r = y$, und das Differentiale ist $3x^2dx + qdx = dy$, folgl. $3x \mp q = \frac{dy}{dx}$ eine quadratische Gleichung, welche null gesetzt, gibt $x = \mp\sqrt{-\frac{1}{3}q}$ oder $= \pm\sqrt{\frac{1}{3}q}$. Ist q beiaht, so hat die Gleichung im ersten Fall zwo unmögliche oder eingebildete Wurzeln, im andern aber zwo mögliche; vom letzten Fall ist die Rede. Wenn man aus der Combinationslehre den leicht zu erweisenden Lehrsatz noch dazu nimmt, daß eine Reyhe von Zeichen + und — die mit + anfangt, Abwechslungen in gerader Zahl habe, wenn sie sich mit +, und in ungerader Zahl, wenn sie sich mit — endiget, und bedenkt, daß die Schlüsse nur gelten, wenn die Wurzeln alle möglich sind, so wird man einen ausführlichen Beweis von diesem Lehrsatz geben können, wie ihn Herr Prof. Kästner gegeben; uns genüget, die erste Gründe davon gesagt zu haben. Herr von Segner hat einen Beweis davon gegeben, er läßt sich aber nicht mit so wenig Worten vortragen wie der Kästnerische, davon wir nur einen kurzen Begriff Auszugsweise geben wollten.

Allgemeine Betrachtung der höhern Differentialien.

§. 1001. Erklär. Wenn man eine Reyhe Grösen in einer Ordnung fortschreibt, und ihre Differenzen sucht, und von den Differenzen wieder

Differenzen, u. s. f. so heißt man die erste Reyhe die Hauptreyhe, die folgende heissen die Differenzreyhen, deren Coefficienten sich finden lassen.

Hauptreyhe	I. Differenzreyhe	II. Differenzreyhe
K		
L	L — K	
M	M — L	M — 2L + K
N	N — M	N — 2M + L
O	O — N	O — 2N + M
P	P — O	P — 2O + N

III. Differenzreyhe	IV. Differenzreyhe
N — 3M + 3L — K	
O — 3N + 3M — L	O — 4N + 6M — 4L + K
P — 3O + 3N — M	P — 4O + 6N — 4M + L.

§. 1002. Zusatz. Auser dem, daß die Coefficienten der Differenzreyhen, mit den Binomialcoefficienten einerley sind, erhellet aus der Tabell folgendes:

I. Entstehen die höhern Differenzreyhen durch die Subtraction der correspondirenden niedern Reyhe von dem unmittelbar vorhergehenden Glied; z. E. der II. Differenzreyhe erstes Glied ist M — 2L + K = M — L — (L — K) der Differenz der vorhergehenden Reyhe; N — 2M + L = N — M — (M — L).

II. Durch die Addition zweyer ersten Glieder zwoer nächsten Reyhen, wird das zweyte Glied der erstern Reyhe gefunden u. s. w. z. E. K + (L — K) = L; und (L — K) + (M — 2L + K) = M — L.

III. Die Summe aller ersten Glieder mit den Binomial-

mialcoefficienten druckt das gegebene Glied der Hauptreyhe aus. Z. E. Das vierte Glied der Hauptreyhe N wird durch die Summe der vier ersten Glieder der Reyhen, mit den Binomialcoefficienten multiplicirt, ausgedruckt; $N = K + 3(L - K) + 3(M - 2L + K) + (N - 3M + 3L - K)$. Eben so fällt es bey O, P, in die Augen.

§. 1003. **Willk. Satz.** I. Die Glieder der Hauptreyhe K, L, M, N, u. s. w. heisse man y, y1, y2, y3, y4, u. s. w. bis yn. da die Zahlen die Stellen der Glieder bedeuten; II. die erste Differenzreyhe heisse $\triangle 1$, und ihre Glieder $L - K$, $M - L$, u. s. w. $1\triangle 1$, $2\triangle 1$, $3\triangle 1$, $4\triangle 1$ u. s. w. III. Die zweyte Differenzreyhe heisse $\triangle 2$ und ihre Glieder $1\triangle 2$, $2\triangle 2$, $3\triangle 2$, $2\triangle 3$ u. s. w.

§. 1004. **Lehrsatz.** Ein jedes Glied der Differenzreyhen läßt sich durch eine allgemeine Reyhe aus den Gliedern der Hauptreyhe ausdrucken.

Satz.

$$1\triangle n = yn - n.yn - 1 + \frac{n.n-1}{1.2}.yn - 2.$$

Bew.

$$1\triangle 1 = y1 - y.$$

aber $2\triangle 1 = y2 - y1$. nach §. 1002. nr. I.

fgl. subtr. $2\triangle 1 - 1\triangle 1 = y2 - 2y1 + y$.

aber $2\triangle 1 - 1\triangle 1 = 1\triangle 2$ nach §. cit. nr. I.

$$1\triangle 2 = y2 - 2y1 + y$$

$$2\triangle 2 = y3 - 2y2 + y1.$$

fgl. subtr. $2\triangle 2 - 1\triangle 2 = y3 - 3y2 + 3y1 - y$

aber

aber $2\Delta 2 - 1\Delta 2 = 1\Delta 3$ nach §. cit.

folgl. $1\Delta 3 = y3 - 3y2 + 3y1 - y.$

ferner $2\Delta 3 = y4 - 3y3 + 3y2 - y1.$

also $2\Delta 3 - 1\Delta 3 = 1\Delta 4 = y4 - 4y3 + 6y2 - 4y1 + y.$

dahero alles allgemein

$$1\Delta n = yn - nyn - 1 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} yn - 2 \ldots.$$

§. 1005. Zus. Weil $1\Delta n = yn - nyn - 1 + \frac{n.n-1.}{1.2} yn - 2$

und $2\Delta n = yn + 1 - nyn + \frac{nn-1}{1.2} yn - 1 ..$

so ist auch $2\Delta n - 1\Delta n = 1\Delta n + 1 = yn + 1(n+1)yn + (n+1)nyn - 1.$

§. 1006. Lehrsatz. Ein jedes Glied der Hauptreyhe läßt sich durch eine Reyhe aus den Gliedern der Differenzreyhen bestimmen.

Satz.

$$yn = y + A1\Delta 1 + B1\Delta 2 + C1\Delta 3 \ldots + R1\Delta r$$

Bew.

nr. I. $y1 = y + 1\Delta 1$

$y2 = y1 + 2\Delta 1$

aber $2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$ §. 1002. nr. II.

$y2 = y1 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2$

$y1 = y + 1\Delta 1$

$y2 = y + 2 \cdot 1\Delta 1 + 1\Delta 2$

nr. II. $y3 = y2 + 3\Delta 1$

$3\Delta 1 = 2\Delta 1 + 2\Delta 2$

$2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$ subst.

$y3 = y2 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2 + 2\Delta 2$

$2\Delta 2 = 1\Delta 2 + 1\Delta 3$

y3

$$y3 = y2 + 1\Delta1 + 1\Delta2 + 1\Delta2 + 1\Delta3 = y2 + 1\Delta1 + 2.1\Delta2 + 1\Delta3$$

aber nr. I. $y2 = y + 2.1\Delta1 + 1\Delta2$

folgl. $y3 = y + 3.1\Delta1 + 3.1\Delta2 + 1\Delta3$.

folglich allgemein, wenn man für die Binomialcoefficienten A, B, C, D u. s. w. setzet

$$yn = y + A.1\Delta1 + B.1\Delta2 + C\,1\Delta3 \ldots + R\,1\Delta r + S\,1\Delta r + 1 \ldots$$

§. 1007. **Zusatz.** Also ist auch $yn + 1 = y2 + A2\Delta1 + B2\Delta2 \ldots + R2\Delta r$. weil die Lage von $yn + 1$ gegen die zweyte Glieder der Reyhe einerley ist mit der Lage yn gegen die erste Reyhe der Glieder.

§. 1008. **Anm.** Die Allgemeinheit dieser Formeln hat Herr Prof. Kästner ausführlich bewiesen; man findet sie zwar nicht in den Wolfischen Elementen; inzwischen sind sie wegen den neuern Schriften unentbehrlich, wie wir im folgenden zeigen werden. Uebrigens enthalten die zween Lehrsätze den allgemeinen Beweis der Lehre von den Differenzreyhen, die §. 235. folg. vorgetragen wurde.

§. 1009. **Willk. Satz.** Man druckt die höhere Differentiale, das ist, das zweyte, dritte, vierte, nte Differential von y aus durch d^2y, d^3y, d^4y, d^ny, und heißt sie auch differentio-Differentialien.

§. 1010. **Zusatz.** Man kann also für $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$, Δ^n §. 1003. auch schreiben, dy, d^2y, d^3y, d^ny; als worein sich die Unterscheide verwandeln, wenn die Abnahme ins Unendliche geht.

§. 1011. **Lehrsatz.** Die differentio-Differentiation geschiehet wie die Differentiation der endlichen variablen Grösen.

Bew.

Bew.

Bey der Addition und Subtraction, oder Summe und Differenz ist es vorhin richtig; aber auch bey der Multiplication und Division findet man einerley Gesetz. Denn es sey xdx noch einmal zu differenziren; man setze

$xdx = z$ so ist $dx = \frac{z}{x}$ und $d^2x = \frac{xdz - zdx}{x^2}$ §. 988.

folgl. $x^2 d^2x = xdz - zdx$

und $x^2 d^2x + zdx = xdz$.

aber $z = xdx$ nach der Voraussetzung; diß substituirt

$$\frac{x^2 d^2x + xdxdx = xdz}{\qquad\qquad\qquad\qquad : x}$$

$xd^2x + dxdx = dz$. das ist

$xd^2x + dx^2 = \text{diff. } xdx$. Durch diese Reduction siehet man also, daß man wie bey endlichen Grösen jeden Factor in das Differentiale des andern multipliciren muß.

§. 1012. **Zusatz.** Das Differentiale von dx^2 ist also nach einer ähnlichen Reduction $2dxd^2x$; u. s. w.

§. 1013. **Zusatz.** Aus gleichem Grunde ist

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2}.$$

§. 1014. **Zusatz.** Um den höhern Differentialien einen besondern Wehrt zu geben, setzt man ein erstes Differentiale, oder eine Grös unveränderlich. Wenn $dy = pdx$, so ist $ddy = dpdx + pd^2x$, ist nun dx unveränderlich, so ist $ddy = dpdx$.

Die

Die Bestimmung der Wehrte durch höhere Differentialien, und die Verwandlung der Gleichungen durch eben diese Mittel.

§. 1015. **Lehrsatz.** Wenn in dem Newtonischen Binomio m unendlich wird, so läßt sich der Wehrt bestimmen, dem sich die Reyhe nähert.

Bew.

Es sey c eine beständige endliche Gröse, e eine, die unendlich abnehme, so ist $m = \frac{c}{e} = \infty$, ist nun das Glied des Binomii

$\frac{m.(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} = P.$ so ist, den Wehrt von m subsituirt, diß unter einerley Benennung

$\left(\frac{c}{e}\cdot\left(\frac{c}{e}-1\right)\cdots\left(\frac{c}{e}-n+1\right)\right):1.2\ldots n.$

$= \frac{c(c-e)\ldots(c-(n-1)e).}{e^n} \cdot 1.2\ldots n = P$

$= \frac{c(c-e)\ldots(c-(n-1)e)}{1.2..n.e^n} = P$ woraus folgt, weil e unendlich abnimmt,

$\frac{c^n}{1.2..n.e^n} = \frac{m^n}{1.3..n.}$ weil $\frac{c^n}{e^n} = m^n.$

§. 1016. **Lehrsatz.** Der Wehrt von einer Gleichung, z. E. $x^3 + x^2 + x$, läßt sich finden, wenn sich z. E. x in $x + e$, oder $x + 2$ verwandelt.

Bew.

Es verwandle sich y in ym wenn sich x in $x + me$ verwandelt; m wachse unendlich, und e nehme unendlich ab, c sey eine beständige Gröse, so ist wie oben $m = \frac{c}{e}$, und $me = c$; und e verwandelt sich durch die unendliche Abnahme in dx.

Nun ist nach §. 1006. $ym = y + A\triangle 1 + B\triangle 2 \ldots + N\triangle n.$

das ist nach §. cit. $ym = y + Ady + Bddy \ldots + Nd^n y.$

und wenn sich e in dx verwandelt, so ist der Nte Binomialcoeffi-

efficient für y^m, wo $m = \frac{c}{e} = \frac{c}{dx} = \frac{c^n}{1.2.3\,ndx^n}$ nach §. 1015.

folglich die Reyhe

$$y^m = y + \frac{cdy}{dx} + \frac{c^2d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{c^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{c^4d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} \cdot\cdot + \frac{c^nd^ny}{1.2..ndx^n}.$$

§. 1017. **Zusatz.** Wenn sich x in x — e verwandelt, so wechseln die Zeichen + — ab; wie aus dem binomischen Lehrsatz erhellet.

§. 1018. **Zusatz.** Gehen die Differentiale von y nicht ohne Ende fort, so wird die Reyhe abgebrochen, und man kann sie vollkommen berechnen.

§. 1019. Anm. In der Gleichung $x^3 + x^2 + x$ verwandle sich x in x + 2, so ist c = 2. folglich

$y = x^3 + x^2 + x$

$\frac{cdy}{dx} = 6x^2 + 4x + 2$ weil $dy = 3x^2dx + 2xdx + dx$

$\frac{c^2d^2y}{1.2.dx^2} = 12x + 4$ weil $ddy = 6xdx^2 + 2dx^2$

$\frac{c^3d^3y}{1.2.3.dx^3} = +8$ weil $d^3y = 6dx^3$; diese Ausdrücke mit den Coefficienten multipl.

$y^m = x^3 + 7x^2 + 17x + 14$ | $\frac{c}{dx}, \frac{c^2}{2dx}, \frac{c^3}{6dx^3}$

gibt die bezeichnete Wehrte, wo $c = 2$, $c^2 = 4$, $c^3 = 8$.

Man findet also den Wehrt auf eben diejenige Weise, wie man ihn in den arithm. Wissenschaften §. 344. gefunden hat.

Nic. Bernoulli Methode,

Alle mögliche Reyhen, durch die sich eine Gleichung auflösen läßt, und die Gestalt der Reyhen, zu finden.

§. 1020. **Lehrsatz.** Wenn einer auf null re-

du-

ducirten Gleichung Hauptglied $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots$ gesetzt wird, und sodann die correspondirende Gleichungsglieder mit den Potenzen, Differentialen u. s. w. correspondirende Reyhen bekommen, so lassen sich die Coefficienten auch aus den Exponenten bestimmen.

Beweis.

Es sey $rrdy^2 - rr + yy = 0$; man differ. noch einmal, so ist $2rrdyddy + 2ydy = 0$, und durch $2dy$ dividirt $rrddy + y = 0$. Wenn nun $r = 1$. so ist, wofern $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots$ gesetzt wird

$dy = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} \ldots$

$ddy = (\alpha-1)\alpha Ax^{\alpha-2} + (\beta-1)\beta Bx^{\beta-2} + (\gamma-1)\gamma Cx^{\gamma-2}$.

folglich

$$ddy + y = \left.\begin{array}{l} \alpha-1\alpha Ax^{\alpha-2} \\ + Ax^{\alpha} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} (\beta-1)\beta Bx^{\beta-2} \\ Bx^{\beta} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} (\gamma-1)\gamma Cx^{\gamma-2} \\ Cx^{\gamma}. \end{array}\right\} \ldots$$

Nun sey $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3, \varepsilon = 4 \ldots$ so ist A, B unbestimmt, weil $\alpha = 0$, und $\beta - 1 = 0$; aber $C = \frac{-A}{\gamma.(\gamma-1)}$; $D = \frac{-B}{\delta.(\delta-1)}$ wo Ax^{α} zum Glied $(\gamma-1)\gamma Cx^{\gamma-2}$ gehört, weil $\alpha = \gamma - 2$.

Man setzt nemlich bey einer steigenden Reyhe, wo x den kleinsten Exponenten hat, α erstlich negativ, dann null, ferner positiv; woraus man A, B, C, D u. s. w. bestimmt, wie §. 348. gelehrt worden.

§. 1021. **Zusatz.** Wollte man in der ersten Reyhe nicht wieder differenziren, sondern unverändert lassen $rrdy^2 - rr + yy = 0$, so ist nach §. 348.

$$yy = AAx^{2\alpha} + 2ABx^{\alpha+\beta} + 2ACx^{\alpha+\gamma} + 2ADx^{\alpha+\delta}$$
$$BBx^{2\beta} + 2BCx^{\beta+\gamma}$$

$$rrdy^2 = \alpha^2 A^2 r^2 x^{2\alpha-2} + 2\alpha\beta AAr^2 x^{\alpha-\beta-2} - - -$$
$$- rr = - rr$$

wenn man nemlich den Wehrt von dy §. 1020. mit sich selbst multiplicirt.

Hieraus werden die Coefficienten zu bestimmen gesucht; wobey verschiedenes in Rucksicht auf die Exponenten u. s. w. in acht zu nehmen; davon Herr Prof. Kästner §. 466. IV. Th. der Mathem. nachgesehen werden kann; α wird nemlich zuerst negativ, hernach 0, und sodann positiv gesetzt, da man sieht, was herauskommt, und ob bey dieser oder jener Gleichung diese Voraussetzungen angehen. Uebrigens ist die gegebene Auflösung §. 1020. allgemeiner als diese, wie Herr Prof. Kästner auch anmerkt in der schon gemeldten Stelle.

§. 1022. **Zusatz.** Wenn $xxddy - ny = 0$, so ist wie oben

$$ddy = (\alpha - 1)\alpha Ax^{\alpha-2} + (\beta - 1)\beta Bx^{\beta-2} \ldots$$
$$x^2 = x^2$$

multiplicirt nach §. 175.

$$x^2 ddy = (\alpha - 1)\alpha Ax^{\alpha} + (\beta - 1)\beta Bx^{\beta} \ldots\ldots$$

wo bey den Expon. — 2 hinwegfällt;

$$ny = nAx^{\alpha} + nBx^{\beta} \ldots\ldots$$

folgl. $xxddy - ny = (\alpha - 1)\alpha) - n)Ax^{\alpha} + (\beta - 1)\beta) - nBx^{\beta} + (\gamma - 1)\gamma) - n)Cx^{\gamma} - - - -$

Man

Man setze wie §. 1020. jeden Coefficienten = 0, so ist $(\alpha\alpha - \alpha - n)A = 0$ und

$$\frac{\alpha\alpha - \alpha - n = 0}{\alpha\alpha - \alpha - n = 0} : A$$

folglich

$\alpha\alpha - \alpha = n$ und nach §. 322.

$\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + n)}$ Eben so ist aus ähnlicher Rechnung

$\beta = \frac{1}{2} \mp \sqrt{(\frac{1}{4} + n)}$; für γ kommt eben diese Gleichung heraus; welches also entweder α oder β seyn müßte; (dann α und β sind nicht gleich wegen den verschiedenen Zeichen $\mp$, davon die obere für eine fallende, die untere für eine steigende Reyhe gelten) es soll aber keines von beeden seyn; folglich ist C u. s. w. null; und der Wehrt von y besteht in den beeden gefundenen Theilen.

§. 1023. Anm. Bey dieser Methode ist noch verschiedenes zu merken, das bey jeden vorkommenden Fällen ein geübter Verstand von selbst finden wird. In dem Kästnerischen Werk findet man dergleichen Fälle und Exempel, wie wir schon angemerkt, und verweisen unsere Leser um so eher dahin, als wir hier nur das Wesentliche dieser Regel, die einen grosen Vorzug vor dem Newtonischen Parallelogramm hat, vorzutragen gesonnen waren.

Die Methode vom Kleinsten und Größten.
(Methodus de maximis & minimis.)

§. 1024. Erklär. Wenn eine Function einer Gröse, z. E. von x bis auf einen gewissen Grad oder Wehrt wächßt, und von da an wieder abnimmt, indeme x beständig zu- oder abnimmt, so heißt dieser Wehrt ihr Größtes (Maximum).

§. 1025. Anm. So hat die Ellipse und der Cirkel ein Maximum in den Ordinaten: denn die größte Ordinate des Cirkels ist der Radius, und hernach nehmen sie wieder ab, unerachtet die Abscisse x immer wächßt. Oder in Zahlen; wenn man sagt,

8 solle so getheilt werden, daß die beede Theile als Factores das gröste Product geben, so sind die Factores 4.4; denn 4.4 = 16 Maximum; ein jedes anders Product ist kleiner; z. E. 2.6; 3.5 u. s. w. eben so ist für $x^2 - 10x + 60 = y$, dieses y für x ein kleinstes, wenn $x = 5$; es ist alsdann 35. Jeder andere Wehrt von x, z. E. 4, oder 6 gröser, beedesmal nemlich = 36. Man kann sie auch in positive und negative Maxima und Minima eintheilen, auch theils einförmige, theils vielförmige Functionen diesfalls betrachten; die einförmige kommen zuerst vor.

§. 1026. **Lehrsatz.** Das Maximum oder Minimum wird gefunden, wenn man die Differentialgleichung davon = o sezt, und ferner durch Calculiren den Wehrt von x oder y sucht.

Bew.

Weil ein Maximum oder Minimum, als ein solches, unveränderlich ist, so ist sein Differential = o; wenn man also eine solche gegebene Gröse differenzirt, das Differentiale = o sezt, so kann man den Wehrt des Maximi oder Minimi in leichtern Fällen finden. Man verlangt das Maximum im Cirkel; die Gleichung ist $ax - x^2 = y^2$, dieses ist ein Maximum; folglich

$ax - x^2 = \text{Maxim.}$

diff.

$adx - 2xdx = 0$ und

$adx = 2xdx$ folglich

$a = 2x.$ und

$\frac{1}{2}a = x.$ wo also die Abscisse dem halben Diameter gleich ist, da ist das Maximum der Ordinate des Cirkels, eben so wird das Exempel §. 1025. berechnet.

§. 1027. Anm. So hat man diese Lehre anfänglich vorgetragen, und so steht sie in den Wolfischen Elementen; allein in neuern Zeiten fand man bessere und allgemeinere Methoden, die Umstände genau zu bestimmen, unter welchen eine Function von x ein Maximum oder Minimum wird; wir wollen sie kürzlich anführen.

§. 1028. Anm. Wenn $\frac{dv}{dx} = (x - f)^2 P$ gesetzt wird, wo P eine Function von x ist, die $x - f$ nicht zum Factor hat, so ist f ein größtes oder kleinstes, wenn der Exponent m ungerade ist; ist aber m gerade, so ist die Function weder ein größtes noch ein kleinstes. Denn y sey eine einförmige Function von x, und x verwandle sich zuerst in $x + \alpha$, hernach in $x - \alpha$; (α kann so klein seyn als man will) so gibt es die beede Reyhen, nach §. 1016. fols.

I. $y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2 y}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 y}{6dx^3}$

II. $y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2 y}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3 y}{6dx^3}$

ist nun y ein größtes oder kleinstes, so muß es in beeden Fällen größer oder kleiner als jeder der gefundenen Werthe seyn.

Diß aber kann nicht geschehen, es sey dann $\frac{dy}{dx} = 0$; setzt man dieses, und $\frac{ddy}{dx^2}$ ist endlich, so müssen die nachgehends folgende Glieder zusammen weniger als dieses dritte Glied betragen, wenn y ein größtes oder kleinstes seyn soll. Ist aber auch $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, so läßt sich noch nichts schliesen.

Es sey also $\frac{ddy}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^3y}{dx^4} = r$, so sind, wenn f statt x gesetzt wird, dessen Wehrt alsdann F heisse, die Reyhen in folgende verwandelt:

I. $F + \frac{1}{2}\alpha\alpha p + \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r$

II. $F + \frac{1}{2}\alpha\alpha p - \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r$

wo das zweyte Glied $\frac{dv}{dx} = 0$, fehlt, und die Schlüsse hier wie oben gemacht werden. Denn wenn $p = 0$, und q endlich, so ist F weder ein größtes noch kleinstes; ist aber $q = 0$, und r endlich, so ist F ein größtes oder kleinstes. Auf diese Weise gehen die Schlüsse immer fort, nach den ungeraden Gliedern von y, nemlich 1, 3, 5, 7 u. s. w. daraus folgt, daß wenn $\frac{dy}{dx} = (x - f)^2 P$, und P eine Function von x ist, die $x - f$ nicht zum Factor hat, f ein größtes oder kleinstes werde, wenn von $(x - f)^m P$ der

Exponent m ungerade ist; ist er aber gerade, so ist er weder ein größtes noch ein kleinstes. Beedes erhellet auch, wenn man $(x-f)^2P$ differenzirt und differentio differenzirt, und hernach $x = f$ setzet, und siehet was herauskommt; bey ungeraden Exponenten wird allemal ein größtes oder kleinstes herauskommen.

§. 1029. **Zusatz.** Das größte Dreyeck in einem halben Cirkel ist das gleichschenklichte; welches auf eine ähnliche Weise erhellet.

Von den Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien.

§. 1030. **Erklär.** Wenn *Fig.* 114. die krumme Linie AM von TM in M berührt wird, so heißt TM die Tangente, TP die Subtangente, QM die Normallinie, die auf TM perpendicular steht, und PQ die Subnormallinie.

§. 1031. **Lehrsatz.** Die Subtangente in allen krummen Linien ist $\frac{ydx}{dy}$.

Bew.

Man ziehe pm und PM unendlich nahe, und MR parallel mit Pp, so ist $\Delta MmR \sim TMP$, folglich

$$mR : MR = PM : PT = \text{Subtangente}.$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}.$$

§. 1032. **Anm.** Das Dreyeck MmR ist das Leibnizische sogenannte Triangulum characteristicum, oder das Barrovische Dreyeck, indeme Barrow, wie wir schon gemeldt, diese nämliche Proportion lange vor Newton und Leibniz in seinen Lectionibus opticis bekannt gemacht, und was Leibniz dy und dx nennt, e und a genannt hat, dahero nach Barrow die Tangente $PT = \frac{ay}{e}$, welches eben so viel als $\frac{ydx}{dy}$, wenn $RM = Pp = dx$, und $Rm = dy$ gesetzt wird.

§. 1033

§. 1033. **Lehrsatz.** In der Parabel ist die Subtangente der doppelten Abscisse gleich.

Satz. $PT = 2x$. *Fig.* 114.

Bew.

$ax = y^2$ Def. der Parabel.

differenzirt

$adx = 2ydy$: a

$dx = \frac{2ydy}{a}$. y

$ydx = \frac{2y^2dy}{a}$ .dy

$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$

$y^2 = ax$ substit.

$\frac{2ax}{a} = 2x = \frac{2y^2}{a}$

$\frac{ydx}{dy} = 2x = PT.$

§. 1034. **Zusatz.** Man muß nemlich bey der gegebenen Gleichung jedesmal durch Differenzirung so weit calculiren, bis man einen gleichgültigen Wehrt für $\frac{ydx}{dy}$ bekommt, welcher der Ausdruck für alle Subtangenten ist; man kann also auf diese Weise aller krummen Linien Subtangenten bestimmen.

§. 1035. **Zusatz.** Folglich allgemein, wenn $a^{m-1}x = y^m$, ist die Subtangente mx.

§. 1036. **Lehrsatz.** Die Subnormallinie in allen krummen Linien ist $\frac{ydy}{dx}$

Satz. *Fig.* 114.

$$PH = \frac{ydy}{dx}.$$

Bew.

$PT : PM = PM : PH.$ weil $TMH = 90°$, und bey P auch rechte Winkel.

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : y^2 : \frac{ydx}{dy} = y^2 \cdot \frac{dy}{ydx} = \frac{ydy}{dx}.$$

§. 1037. **Lehrsatz.** Die Subnormallinie der Parabel ist eine beständige Linie und dem halben Parameter gleich.

Satz. $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}a.$

Beweis.

$ax = y^2$ Def. der Parabel; differenzirt

$adx = 2ydy$:2

$\frac{1}{2}adx = ydy$:dx

$\frac{1}{2}a = \frac{ydy}{dx} = PH.$

§. 1038. **Zusatz.** Weil *Fig.* 108. in der Parabel $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$, so ist $FH = FP + PH = x - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a = x + \frac{1}{4}a$;

also $FH = x + \frac{1}{4}a$ aber

$FM = x + \frac{1}{4}a$ §. 898.

nr. I. $FH = FM$

ferner $TP = 2x$ §. 1033.

$AP = x$ subtr.

TP

$TP - AP = TA = x$

$AF = \frac{1}{4}a$ add.

nr. II. $TA + AF = TF = x + \frac{1}{4}a$.

folgl. nach nr. I. $TF = FH = FM$.

dahero der Winkel $FMH = FHM$ im gleichschenkl. Δ

ferner $FHM = HMQ$ §. 465.

$FMH = HMQ$

$TMH = HMm$ sind rechte

$TMH - FMH = HMm - HMQ$!

das ist $TMF = mMQ$.

§. 1039. Anm. In einem paraboliſchen Spiegel werden daher alle einfallende Strahlen wie QM gegen den Brennpunkt F gebrochen; wie in der Optik erhellt; dahero die paraboliſche Spiegel allen andern vorzuziehen ſind und die gröſeſte Wirkung thun.

§. 1040. **Lehrſatz.** Die Subtangente der logarithmiſchen Linie iſt eine beſtändige Linie.

Bew. *Fig.* 119.

$MR : Rm = PM : PT$

$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy} = PT$ und wenn eine andere Abſciſſe y, ihre Ordinate z heißt, ſo iſt

$\frac{zdy}{dz} = PT$.

da aber nach §. 952. $dy = dx$ und nach dieſem §.

$y : y + dy = z : z + dz$ auch nach §. 276.

$y : (y + dy) - y = z : (z + dz) - z$ ſo iſt

$y : dy = z : dz$ oder

$\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz}$

$dx = dy$ multipl.

$\frac{ydx}{dy} = \frac{zdy}{dz}$.

§. 1041. Anm. Die Anwendung dieſer Lehre von den Tangenten und Subtangenten u. ſ. w. iſt von ſehr ausgebreitetem

Nutzen; man kann dahero sich in Erfindung anderer Linien noch üben, auch die Methode umkehren, und aus den gegebenen Subtangenten die krumme Linien finden. Z. E. $\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{2dy}$, man suche die krumme Linie; so ist $aydx = 2y^2\,dy$, welches integrirt $ax = y^2$ gibt; wir werden davon in der Integralrechnung handeln.

Allgemeine Regeln der Integralrechnung, auch in Rücksicht auf die Wiederherstellung der beständigen Grösen.

§. 1042. Erklär. Das Integrale heißt die Grösе, durch deren Differenzirung das Differentiale entstanden ist; und Integriren heißt das Integral aus der gegebenen Differentialgrösе finden.

§. 1043. Willk. Satz. Integral und Integriren heißt man auch Summe und Summiren; und solche Integralsumme druckt man durch den Buchstaben $\int$ aus, der für das Differential gesetzt wird; z. E. $\int(ydx + xdy) = xy$.

§. 1044. Zusatz. Aus den Differentiationsregeln nach den vier Rechnungsarten muß man noch wissen, daß

I. $\int(dx \mp dy) = x \mp y$

II. $\int(ydx + xdy) = xy$.

III. $\frac{\int(ydx - xdy)}{y^2} = \frac{x}{y}$.

Eben so erinnert man sich aus der Differentiation der Potenzen und Wurzeln, daß

I. $\int(nx^{n-1}dx) = x^n$

II. $\int(x^{m-1}dx) = \frac{1}{m}x^m$ oder $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

III. $\int\left(\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}du\right) = \sqrt[n]{u^m}$ und

IV.

IV. $\int\left(\frac{-xdx}{\sqrt{aa-xx}}\right) = \sqrt{aa-xx}$ bey zusammengesetzten Differentialien, davon wir sogleich weiter reden werden.

§. 1045. **Zusatz.** Weil bey den Potenzen und Wurzeln einerley Differentiationsregeln gegeben werden, so läßt sich auch die Integrationsregel davon in Worten ausdrucken, welche man um so eher behalten muß, als diese Formeln am häufigsten vorkommen; die Regel ist die folgende: **Man vermehrt den Exponenten der veränderlichen Grösse um Eins, und dividirt hernach alles mit dem in das Differentiale der veränderlichen Grösse (dx) multiplicirten neuen Exponenten.** z. E. $\int(mx^{m-1}dx) = \frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$, und $\int(x^m dx) = \frac{x^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$.

§ 1046. **Zusatz.** Weil die beständige Grössen im Differenziren wegfallen, oder wie man sagt, null werden, §. 983. so muß man bey dem Integriren eine solche Grösse wieder addiren oder subtrahiren; man drückt sie aus $\pm$ *Constans* oder Const. oder nur C.

§. 1047. **Lehrsatz.** Die beständige Grösen findet man, wenn man das Integral $= 0$ setzt, und hernach suchet, ob für die Const. noch was übrig bleibe, ob sie positiv, negativ oder null werde. Z. E. Man hätte das Integral $Z = \frac{m}{m+1}(x+a)^{\frac{1+m}{m}} + \text{Const.}$ und man wollte die Const. finden; so setzt man es $= 0$, folgl. ist auch $\frac{m}{m+1}a^{\frac{1+m}{m}} + C = 0$; und

da

dahero $-\frac{m}{m+1} a \frac{1+m}{m} =$ Const. also ist sie negativ, und das ganze Integrale heißt $\frac{m}{m+1}(x+a)\frac{1+m}{m}$ $-\frac{m}{1+m} a \frac{1+m}{m}$, welches man schicklicher ausdrucken kann; wie wir im folgenden zeigen, wo man die Erfindung der Constanten auch aus den Figuren erläutert.

Einige schwerere Integralformeln für zusammengesetzte Differentialien.

§. 1048. Erklär. Zusammengesetzte Differentialien sind wie nr. IV. §. 1044. und die Integralregel ist wie bey den Potenzen; nur fehlt es mehrmalen, daß Ungeübte die Sache nicht so leicht übersehen können; leichtere Formeln sind $\int c\,dx\,(a+x)^p = \frac{c(a+x)^{p+1}}{p+1}$ nach §. 1044. nr. II. woraus auch verglichen mit nr. IV. diese $\int\left(-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}.\right)$ $(a+\sqrt{(aa-xx)})^1 = \frac{1}{1}a+\sqrt{(aa-xx)}^1$ leicht zu übersehen seyn wird. Wir wollen einige schwerere geben.

§. 1049. Satz. $x^{rn} \cdot x^{n-r}dx \cdot (a+bx^n)^p$ läßt sich integriren.

Beweis.

I. Es sey $a+bx^n = z$

differenz. ——————

nach §. 977. $nbx^{n-1}dx = dz$

——————. nb

$x^{n-1}dx = \frac{dz}{nb}$

II. Es sey wie nr. I.

$a+bx^n = z$ folgl.

$bx^n = z-a$

——————: b

$x^n = \frac{z-a}{b}$

diese

diese Wehrte substituirt geben das verwandelte Diffe-

rential $\left(\frac{z-a}{b^r}\right)^r \cdot \frac{z^p\,dz}{nb} = \frac{(z-a)^r \cdot z^p\,dz}{nb^{r+1}} =$

$$\left(z^r - rnz^{r-1}a + \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} z^{r-2}a^2 - \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{r-3}a^3 \ldots \pm a^{rn}\right) \cdot \frac{z^p\,dz}{nb^{rn+1}}$$

$$= z^{r+p}dz - rnz^{rn+p-1}a\,dz + \frac{rn \cdot rn-1}{1 \cdot 2} z^{rn+p-2}a^2\,dz$$

$$\overline{\qquad\qquad nb^{rn+1} \qquad\qquad}$$

davon ist das Integral des Zehlers $= \frac{z^{r+p+1}}{rn+p+1} - \frac{rz^{r+p}a}{rn+p} +$

$$\frac{r \cdot r-1\, z^{r+p-1}a^2}{1 \cdot 2\ (rn+p-1)} \ldots\ldots + \frac{a^r z^{p+1}}{p+1} \cdot$$

welches mit dem unveränderlichen Nenner nb^{r+1} noch dividirt wird; da man nun überall für z seinen Wehrt $a + bx^n$ setzen kann, so läßt die obige Differentialformel sich wirklich integriren; wenn rn eine endliche ganze bejahte Zahl ist, welches vorausgesetzt wird.

§. 1050. Anm. Man solle $x^3 \cdot x^{-\frac{1}{3}-1}\,dx(a+bx^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}$ integriren; so ist $n = -\frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{3}$, $rn = 3$; und das

$$\text{Integral} = \frac{(3z^{13:3}}{13} - \frac{9az^{10:3}}{10} + \frac{9a^2z^{7:3}}{7} - \frac{3a^3z^{4:3})}{3}$$

$: - \frac{b^4}{2}$, denn dieser Divisor muß nb^{rn+1} seyn: aber $^{rn=3}_{;}$ und $n = -\frac{1}{3}$; folgl. $b^{rn} = b^3$, und der andere Factor nb $= -\frac{1}{3}b$, diese beede multiplicirt geben $-\frac{1}{3}b \cdot b^3 = -\frac{b^4}{3}$.

§. 1051. Zusatz. So oft $x^m dx(a + bx^n)^p$ sich in $x^{m+1-n} . x^{n-1} dx . (a + bx^n)^p$ verwandeln läßt, daß $m + 1 - n = rn$, eine ganze positive Zahl wird, so kann man das Integral finden.

§. 1052. Lehrsatz. Ein zusammengesetztes Differential, wo Irrationalgrösen vorhanden sind, läßt sich integriren.

Satz.

$\frac{aadx}{(x\sqrt{ax+xx})}$ soll integrirt werden.

Es sey nr. I. $\sqrt{(ax+xx)} = \frac{zx}{b}$ so ist $z = \frac{b\sqrt{ax+xx}}{x}$

und $ax + xx = \frac{zzxx}{bb}$

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} ; x$

$a + x = \frac{zzx}{bb}$

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} . bb$

$abb + xbb = zzx$ folglich

$abb + zzx - xbb = x(z^2 - b^2)$

$\frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad} ; zz - bb$

nr. II. $\frac{abb}{zz-bb} = x.$

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} . \frac{z}{b}$

$\frac{abb . z}{(zz-bb)b} = \frac{xz}{b}$ das ist

nr. III. $\frac{abz}{zz-bb} = \frac{xz}{b} = \sqrt{(ax+xx)}$ nr. I.

aber nr. II. $x = \frac{abb}{zz-bb}$ folglich differenzirt

$dx = \frac{abb . -2zdz}{(zz-bb)^2}$ nach §. 992.

dahero $aadx = \frac{aa . -2abbzdz}{(zz-bb)^2}$

und $x\sqrt{(ax+xx)} = \frac{abb}{zz-bb} \cdot \frac{abz}{zz-bb}$ folglich

aadx

$\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = \frac{aa}{(zz-bb)^2} \cdot \frac{-2abbzdz}{} \cdot \frac{zz-bb \cdot zz-bb}{abb \cdot abz} = -\frac{2adz}{b}$

wenn man wirklich multiplicirt, und gegeneinander aufhebt; aber $\int(-\frac{2adz}{b}) = -\frac{az}{b}$, und den Wehrt von z substituirt $= -\frac{2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

§. 1053. Satz. $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ läßt sich integriren.

Es sey $\sqrt{xx-aa} = z-x$ so ist

nr. I. $xx-aa = zz-2zx+xx$ also wenn xx subtr. wird

$-aa = zz-2zx$ und

$2zx = zz+aa$ folglich

nr. II. $x = \frac{zz+aa}{2z}$ und

$z-x = z-\frac{(zz+aa)}{2z} = \frac{2zz-zz-aa}{2x}$ das ist

$= \frac{zz-aa}{zz} = z-x$ aber nr. I.

$\sqrt{(xx-aa)} = z-x$ folgl.

nr. III. $\frac{zz-aa}{2z} = \sqrt{(xx-aa)}$

weil aber nr. II. $x = \frac{zz+aa}{2z}$ gefunden

so ist $dx = \frac{zz-aa}{2zz}dz$ und also

$$\frac{dx}{\sqrt{xx-aa}} = \frac{zz-aa}{2zz}dz \cdot \frac{2z}{zz-aa} = \frac{dz}{z}$$

welches ein logarithmisches Differentiale ist, wie wir unten zeigen; und welches integrirt $= lz = l(x+\sqrt{(xx-aa)})$.

§. 1054. Exempel von Differentialgleichungen, die durch eine doppelte Differentiation endlich ihr Integrale geben.

Satz. $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ gibt

integrirt eine Gleichung für den Cirkel. Man setze $dy = pdx$, so wird sich die Gleichung verwandeln in

$$ydx - xpdx = a\sqrt{(dx^2 + ppdx^2)} : dx$$

nr. I. $y - xp = a\sqrt{1 + pp}$ man differenz. wieder, so ist

$$dy - xdp - pdx = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

$dy = pdx$ substituirt, folglich

$$-xdp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$$ und

nr. II. $x = -\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ aber aus nr. I.

$y = a\sqrt{(1+pp)} + xp$ den Wehrt von x substituirt, gibt

$$y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$$ dahero

$$\frac{x}{y} = -p \text{ oder } p = -\frac{x}{y}$$ und folglich

wieder $y = \frac{a}{\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}}$ und also $y^2 + x^2 = a^2$

eine Gleichung für den Cirkel.

§. 1055. Anm. Diese Auflösung habe vor 16 Jahren an Hrn. Prof. Kästner überschrieben, der sie in das Hamb. Magaz. T. X. p. 637. folgg. unter meinem Namen eingerückt hat; man kann durch Verwandlung mehrere Integrationsformeln finden, die man durch die ordentliche Regeln nicht bekommt; hier habe ich nur die nöthigste anführen wollen.

Von

Von der Quadratur der krummen Linien.

§. 1056. Erklär. Wenn *Fig.* 114. die Abscisse AP um Pp wächßt, folglich die correspondirende Ordinate pm wird, so heißt das Trapezium PpmM, das Differentiale der sich verändernden Fläche AMP.

§. 1057. Zusatz. Weil AP = x, so ist Pp = dx, und pm = PM + Rm = y + dy. Nun ist PMmp = PMRp + MmR = ydx + $\frac{1}{2}$dxdy, wofür man ydx schreibt, weil $\frac{1}{2}$dxdy gegen ydx unendlich klein ist und verschwindet. Also ist in allen Flächen das Differential der Fläche ydx.

§. 1058. Anm. So wird diese Lehre insgemein vorgetragen; Herr Prof. Kästner gibt, um die geometrische Schärfe augenscheinlicher zu machen, folgenden Beweis: Die Fläche AMP wachse und verändere sich, bis ANQ daraus wird; die ursprüngliche Fläche heisse Z, und ihr endliches Wachsthum ΔZ; so ist

I. $\Delta Z < (PM + NS)\,PQ$.

II. $\Delta Z > (PM + \frac{1}{2}NS)\,PQ$.

wo NS die Höhe des Rectanguli wird, des Dreyecks Höhe aber MS = PQ ist.

also nr. I. $\frac{\Delta Z}{PQ} < PM + NS$

$$\frac{\Delta Z}{PQ} : PM$$

$$\frac{\Delta Z}{PM.PQ} < 1 + \frac{NS}{PM}.$$ und eben so

nr. II. $$\frac{\Delta Z}{PM.PQ} > 1 + \frac{NS}{2PM}.$$

Da nun die Ordinaten unendlich nahe wie pm, PM kommen können, so kann $\frac{NS}{PM}$ unendlich abnehmen, und kleiner werden, als jede angebliche Gröse. Demnach kann der Quotient $\frac{\Delta Z}{PM.PQ}$ der Einheit unendlich nahe kommen, und muß endlich = 1 werden,

den, wenn $\frac{NS}{PM}$ und $\frac{NS}{2PM}$ kleiner werden als jede angebliche Gröse (quavis data minor); folglich keinen Unterschied mehr haben. Ist aber diß, so wird $PQ = Pp = dx$; und $\triangle Z = dZ$; folglich $\frac{dZ}{ydx} = 1$. und $dZ = ydx$; das ist, das Differential der Fläche wird $= ydx$. Man sehe Herrn Prof. Kästners Anfgr. IV. Th. §. 20.

§. 1059. **Lehrsatz.** Die Apollonische Parabel läßt sich quadriren.

Satz. $\int(ydx) = \frac{2}{3}xy$. *Fig.* 114.

Bew.

$$ax = y^2$$

$\sqrt{}$ extrah.

$$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$$

$\cdot dx$

$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = ydx$ das Flächendifferential diß integrirt gibt

$$\int(ydx) = \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{ax} - \frac{2}{3}xy + C.$$

C zu finden, sezt man nach §. 1047. $x = 0$; folglich wird auch $\frac{2}{3}xy + C = 0$, und $C = 0$; hier darf dahero kein C addirt werden; und das Integral ist $\frac{2}{3}xy$.

§. 1060. Anm. Man kann auf diese Weise eines Dreyecks Inhalt finden; damit man in geradelinigten Figuren die Probe sehe; es heiße *Fig.* 66. α. β. $BD = a$, $AC = b$, $bd = x$, $ac = y$. so ist, weil

$$BD : AC = bd : ac$$
$$a : b = x : y$$

folg-

Folglich $\frac{bx}{a} = y$ die Gleichung für das △.

$$\frac{bx}{a}\,dx$$

$\frac{bxdx}{a} = ydx$ das Flächendifferential, diß integrirt, gibt

$\int ydx = \frac{bx^2}{2a} = \frac{yx}{2} = \frac{ab \,.\, ac}{2}$, wie schon in der Geometrie aus andern Gründen bewiesen wurde. Eben das erhellt auch aus *Fig.* 186. ß.

§. 1061. Das parabolische Segment PMNQ läßt sich quadriren.

Denn es sey *Fig.* 114. AP = b, PQ = x, QN = y. so ist AQ = b + x; folgl. $ab + ax = y^2$ und $\sqrt{}ab + ax = y$.

$$\frac{}{}\,dx$$

$dx\sqrt{}ab + ax = ydx$ nun setze man $\sqrt{}(ab + ax) = v$. so ist $ab + ax = v^2$ und

$$\frac{}{}:a$$

$adx = 2vdv$

$dx = \frac{2vdv}{a}$ und

$ydx = \frac{2v^2dv}{a}$ folglich

$\int(ydx) = \frac{2}{3}v^3 = \frac{2}{3}(ab + ax)\sqrt{}(ab + ax) = \frac{2}{3}(b + x)\sqrt{}(ab + ax) + C$. Man setze $x = 0$, so ist $\frac{2}{3}(b + 0)\sqrt{}ab + 0) + C = 0$. das ist $\frac{2}{3}b\sqrt{}ab + C = 0$ folglich $C = -\frac{2}{3}b\sqrt{}ab$. also muß man von dem obigen Integral noch diesen Wehrt abziehen. In der Figur ist er AMP, denn man hat das ganze Stück AMNQ quadrirt; man verlangt aber nur PMNQ; darum muß man das erste abziehen, wei-

len $PMNQ = AMNQ - AMP = \frac{2}{3}(b + x)\sqrt{ab + ax}) - \frac{2}{3}\sqrt{ab}$. Man siehet, wie man die Constantes auch in der Zeichnung ausgedruckt finde.

§. 1062. Anm. Für die Hyperbel, wo $y = \frac{a^3}{x^2}$, ist

$ydx = a^3x^{-2}dx$ diß integrirt, gibt

$$\int ydx = \frac{a^3x^{-1}}{-1} + C = -\frac{a^3}{x} + C.$$

setzt man $x = 0$, so ist $-\frac{a^3}{0} = \infty$.

Wo man dahero x, *Fig.* 117. auf der Horizontalseite, und eben auch daselbst C als den Raum auf dieser Seite annehmen muß.

Die Rectification der krummen Linien, besonders auch der Neilischen Parabel.

§. 1063. Lehrsatz. Wenn *Fig.* 114. der Bogen AM um Mm wächßt, so heißt Mm sein Differentiale, und diß Differential, gesetzt daß $AM = s$, heißt $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Beweis.

Mm sey unendlich klein, und also von der Sehne um keine angebliche Gröse unterschieden, so ist

$Mm = \sqrt{(MR^2 + Rm^2)}$ nach dem Pythag. Lehrs.

aber $MR = Pp = dx$ und

$Rm = dy$. folglich

$Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy)}$.

§. 1064. Anm. Wenn man die Linie AM bis N wachsen läßt, so ist die Sehne von MN kleiner als der Bogen; diese Differenz sey p; so ist $\frac{MN}{\sqrt{MS^2 + SN^2}} = 1 + p$; da nun p unendlich abnehmen und kleiner werden kann als jede angebliche Gröse, weil pm und PM unendlich nahe zusammen rücken können, so wird in diesem Fall $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 1$, und $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Das

ist

ist Euclideisch geschlossen, wie oben, aus dem Begriff einer Gröse die kleiner werden kann, als jede angebliche Gröse (quavis data minor). Der obige gewöhnliche Ausdruck sagt eben das, nur mit andern Worten.

§. 1065. **Zusatz.** Wenn man also in einer gegebenen Gleichung $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ausdruckt, und hernach den Ausdruck integriren kann, so hat man die krumme Linie rectificirt.

§. 1066. **Lehrsatz.** Die Neilische Parabel, in welcher $y^3 = ax^2$, läßt sich vollkommen rectificiren.

Bew.

$y^3 = ax^2$

——— $\sqrt{}$ extrah.

$y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}x$

——— differenzirt

$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy = a^{\frac{1}{2}}dx$

——— $: a^{\frac{1}{2}}$

$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy : a^{\frac{1}{2}} = dx$ das ist §. 188.

$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{a}}\,dy = dx.$ und quadrirt

$\frac{9y}{4a}\,dy^2 = dx^2$ folglich

$$dy^2 + dx^2 = dy^2 + \frac{9y}{4a}dy^2 = (1 + \frac{9y}{4a})dy^2$$

$$\text{dahero } ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})}$$

das ist unter einerley Benennung und aus dem Nenner die Wurzel wirklich extrahirt

$$= \frac{dy\sqrt{(4a + 9y)}}{2\sqrt{a}} = \frac{dy.(4a + 9y)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{a}}.$$

Wenn man nun diesen Ausdruck integriren kann, so ist die Parabel rectificirt. Dieser Ausdruck läßt sich nach dem Lehrsatz §. 1049. integriren, wenn man für die dortige Buchstaben y, a, b, n, p, r die hier vorkommende substituirt y, 4^a, 9, 1, $\frac{1}{2}$, 0.

Dahero das Integral $\frac{\int(dy.(4^a + 9y)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{a}}$

$= \frac{2}{3}\frac{1}{7}z^{\frac{3}{2}} : 2\sqrt{a}) + C. = \frac{1}{3}\frac{1}{7}z\sqrt{\frac{z}{a}} + C.$

Das C zu finden setzt man, weil x und y zugleich $= 0$, auch $s = 0$; folglich da

$s = \frac{1}{2}\frac{1}{7}(4^a + 9y)\sqrt{(4 + \frac{9y}{4a})} + C,$

$0 = \frac{1}{2}\frac{1}{7}4^a . 2 + C.$ dahero

$C = -\frac{8a}{2}\frac{1}{7}$, u. also $s = \frac{1}{2}\frac{1}{7}(4^a + 9y)\sqrt{(4 + \frac{9y)}{4a}} - \frac{8a}{2}\frac{1}{7}$

§. 1067. Anm. Dieses ist die erste krumme Linie, die man rectificirt hat. Wilhelm Neil, ein Engländer, der den mathem. Wissenschaften Ehre gemacht hätte, wenn er länger gelebt hätte, hat ihre Rectification erfunden und im 20 Jahr seines Alters 1657 bekannt gemacht; dahero heißt sie auch die Neilische Parabel. Der Titel seiner Schrift heißt: Æquatio lineæ rectæ cum parabola. Man begreift aber von selbst, daß er sie nicht durch die damals noch nicht erfundene oder wieder erfundene Differential- und Integralrechnung aufgelößt habe.

§. 1068. Zusatz. Es sey das Element der Neilischen rectificirten Parabel gleich dem Element einer Fläche durch eine beständige Gröse dividirt, diß Element sey $\frac{zdy}{a}$, wo y der andern krummen Linie Abscisse ist; so ist

$dy^2(4^a + 9y) = \frac{z^2 dy^2}{a^2}$ und

$dy \quad dy$ $4^a +$

$dy \quad dy$

$\frac{4a + 9y}{4a} = \frac{z^2}{a^2}$ folglich

$4a^2 + 9ay = 4z^2$ es sey

$y = u + e$ so ist

$4aa + 9au + 9ae = 4z^2$ es sey

$4aa + 9ae = 0$ so ist

$9au = 4z^2$ oder $\frac{9}{4}au = z^2$ eine Apollonische Parabel, deren Parameter $= \frac{9}{4}a$; folglich ist das Flächenelement durch a dividirt in der Apollonischen Parabel dem Längenelement der Neilischen gleich; und weil man die erste quadriren kann, so läßt sich die andere rectificiren, oder ihre Rectification wird dadurch begreiflich.

§. 1069. Lehrsatz. Die Apollonische Parabel läßt sich anders nicht als durch eine unendliche Reyhe, nach dem binomischen Lehrsatz rectificiren. Es ist in der Apollon. Parabel

$ax = y^2$ folglich

$adx = 2ydy$ und $dx = \frac{2ydy}{a}$ und

$dx^2 = \frac{4y^2}{a^2} dy^2$ folglich

$dy^2 + dx^2 = dy^2 + \frac{4vv}{aa} dy^2 = (1 + \frac{4yy}{aa}) dy^2$ und

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{4yy}{aa})}$; der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gibt nach dem Newtonischen Binomio

$ds = dy(1 + \frac{2yy}{aa} - \frac{2y^4}{a4} + \frac{4y^6}{a^6} \cdots)$

und integrirt, oder

$$S = y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6}.$$

§. 1070. Zusatz. Weil $\frac{1}{2}ds = \frac{2dy}{a}$ gesetzt, $2z = \frac{1}{4}aa + yy$ der gleichseitigen Hyperbel Gleichung gibt, so könnte man wie oben §. 1068. auch die Apollonische Parabel rectificiren, wenn man die Hyperbel durch einen endlichen Ausdruck quadriren könnte.

Newtons und Leibnizens Methoden den Cirkel zu quadriren und zu rectificiren, nebst Diff. Formeln für den Cirkel.

§. 1071. Lehrsatz. Die Quadratur des Cirkels gibt eine unendliche Reyhe; wenn der Diameter des Cirkels = 1, so ist seine Gleichung $y^2 = x - x^2$; folglich

$$y = \sqrt{(x - x^2)} = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$ydx = dx(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$ das Flächendifferential.

Aber die Quadratwurzel aus $x - x^2$ gibt nach dem Newtonischen Binomio eine unendliche abwechselnde Reyhe, und es wird

$$ydx = (x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} \ldots)dx.$$

diß integrirt, gibt

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3\,8}x^{\frac{7}{2}} \ldots - \ldots$$

§. 1072.

§. 1072. Lehrsatz. Eben so gibt die Rectification eine unendliche Reyhe. Denn es sey *Fig.* 115. Mm = ds; man ziehe die Tangente AB, und die Secante CB und dieser durch m die andere Cb unendlich nahe, so ist, wenn der Radius AC = 1, Tang. = t; nach dem Pythag. Lehrs. $CB = \sqrt{(AC^2 + AB^2)} = \sqrt{(1 + tt)}$, und die Proportion

CB : CA = Bb : Bu weil $\Delta ABC \sim Bbu$. d. i. in Buchstaben

$$\sqrt{(1+tt)} : 1 = dt : Bu \text{ folgl. } Bu = \frac{dt}{\sqrt{1+tt}}$$ weil dt das Differ. der Tang. ist.

Es ist ferner

CB : Bu = CM : Mm das ist

$$\sqrt{(1+tt)} : \frac{dt}{\sqrt{(1+tt}} = 1 : Mm = \frac{dt}{1+tt}$$ das Differ. von dem Bogen AM.

aber $\frac{dt}{1+tt} = dt \cdot \frac{1}{1+tt}$; und $\frac{1}{1+tt}$ gibt eine unendliche Reyhe nach §. 157. wovon das Integrale wie oben gesucht wird; ist nun t = die Tang. von 45°, so ist t = 1; §. 768. folglich wird die Reyhe seyn

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots\ldots$$

das ist, der rectificirte Bogen von 45° ist dem Radius gleich, weniger $\frac{1}{3}$, mehr $\frac{1}{5}$, weniger $\frac{1}{7}$ vom Radius u. s. f.

§. 1073. Anm. Diese Rectification hat Leibniz gesucht; wie die Quadratur Newton. Man merkt sich aber besonders das Differential des Bogens durch die Tangente ausgedruckt $= \frac{dt}{1+tt}$ weil es von mehrerm Gebrauch ist.

§. 1074. **Zusatz.** Eben so ist das Differential eines Bogens aus dem Sinus zu merken, das sehr häufig vorkommt, und in Rechnungen genutzt wird. Wenn AMN *Fig.* 114. eine Cirkellinie wäre, und Q das Centrum, PM der Sinus des Bogens AM; so ist, wenn Am = a, der Sinus PM = s, der Cosinus $PQ = \sqrt{(rr - ss)}$ nach §. 700. und $AP = AQ - PQ = r - \sqrt{(rr - ss)}$; diß differenzirt, gibt $d(AP) = -\frac{sds}{\sqrt{(rr-ss}}$ nach §. 992. = Pp = MR = dx, folglich ist hie da = $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(d.AP^2 + d.PM^2)}$

$= \sqrt{d.\left(\frac{-sds}{\sqrt{(rr-ss)}}\right)^2 + ds^2} = \sqrt{\frac{d.ssds^2}{rr-ss} + ds^2)}$

$= \sqrt{\frac{rrds^2 - ssds^2 + ssds^2}{rr-ss}} = \sqrt{\frac{rrds^2}{rr-ss}} = \frac{rds}{\sqrt{rr-ss)}}$

Dieser Ausdruck da = $\frac{rds}{\sqrt{rr-ss)}}$ kommt nicht nur häufig vor, sondern läßt sich auch, wenn r = 1, ausdrucken da = $\frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$.

§. 1075. **Zusatz.** Weil da = $\frac{rds}{\sqrt{(rr-ss)}}$ und diß

$= \frac{rds}{r\left(\sqrt{1-\frac{ss}{rr}}\right)} = \frac{ds}{\left(1-\frac{ss}{rr}\right)^{\frac{1}{2}}} = ds(1-ss)^{-\frac{1}{2}}$ §. 190.

so läßt sich der Ausdruck nach dem Newtonischen Binomio in eine unendliche Reyhe verwandeln, die also heißt

$da = ds\left(1 + \frac{1}{2}\frac{ss}{rr}\right) + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 4}\left(\frac{ss}{rr}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}\left(\frac{ss}{rr}\right)^3 \ldots$

das Integrale ist

f(da)

$$f(da) \text{ oder } a = s + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{s^3}{r^2} + \frac{1 \cdot 3}{1.2.4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{s^5}{r^4} +$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1.2.3.8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{s^7}{r^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1.2.3.4.16} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{s^9}{r^8} \cdot \text{---}$$

§. 1076. **Zusatz.** Eben so kann man, wenn man die Reyhe umkehrt, um die Gestalt der Reyhe zu wissen, aus dem Bogen den Sinus finden; wo hernach die Coefficienten wie §. 995. bestimmt werden.

§. 1077. **Zusatz.** Man kann auch aus dem Quersinus den Bogen und umgekehrt, ferner aus dem Bogen den Cosinus, aber hie nicht umgekehrt, aus dem Bogen die Tangente und umgekehrt, wie oben §. 1072. ferner aus dem Bogen die Cotangenten, Secanten, Cosecanten finden; die Rechnungen sind nicht viel von einander unterschieden, wenn man nur die Erklärung der trigonom. Linien weiß, und würden für gegenwärtiges Handbuch zu weitläuftig seyn.

Die umgekehrte Methode der Tangenten.
(Methodus Tangentium inversa.)

§. 1078. **Erklär.** Weil die Subtangente allgemein $\frac{ydx}{dy}$ ist, so wird die krumme Linie umgekehrt gefunden, für welche ein anderer Ausdruck der Subtangente gegeben ist.

§. 1079. **Anm.** Man soll die krumme Linie finden, deren Subtangente $\frac{2y^2}{a}$; so ist

$$\frac{y\,dx}{dy} = 2y^2a$$

$$ydx = 2y^2\,dy : a \quad : y$$

$$adx = 2ydy : a \quad \text{und integrirt}$$

$$ax = y^2 \quad \text{die Apollonische Parabel.}$$

§. 1080. Aufgabe. Man soll die krumme Linie finden, deren Subnormallinie beständig. Weil $\frac{ydy}{dx}$ der Ausdruck für alle Subnormallinien, so ist $\frac{ydy}{dx} = a$, also $ydy = adx$, diß integrirt, gibt $\frac{1}{2}y^2 = ax$, und $y^2 = 2ax$; wo der Parameter $2a$, folglich die Subnormallinie dem halben Parameter gleich ist.

§. 1081. Aufg. Die krumme Linie zu finden, deren Subtangente beständig ist. Es ist also $\frac{ydx}{dy} = 1$, folgl. $ydx = dy$ und $dx = \frac{dy}{y}$, aber nach §. 1040. ist $\frac{dy}{y}$ das Differentiale der Logistik, oder $dx = l.dy$.

§. 1082. Anm. Diß gibt uns Anlaß, von den logarithmischen Differentialien und dahin gehörigen Rechnungen zu handeln, welche eine Erfindung von Joh. Bernoulli sind.

Die logarithmische Differentialien, und der Unterschied der natürlichen oder hyperbolischen, und der künstlichen Logarithmen.

§. 1083. Erklär. Wenn für 1 nach §. 1081.

ge-

gesetzt wird a, so ist $a.\frac{dy}{y} = dx$; und $al\frac{dy}{y} = l.y = x$.

so ist $\frac{dx}{x} = lx$, $\frac{dz}{z} = l.z.$ u. s. w. der Grund ist §. 1040. zu finden.

§. 1084. **Zusatz.** Wenn nach den gewöhnlichen Regeln integrirt würde, so wäre, wenn $\frac{ady}{y} = ay^{-1}dy$, integrirt $s.dx = s.ay^{-1}dy = \frac{ay^{-1+1}}{-1+1} = \frac{ay^0}{0} = \infty + C$. Diß gäbe was unendliches, das nicht gebraucht werden kann; also bleibt nichts übrig, als daß nach dem Gesetze der logarithmischen Linie, oder nach dem logarithmischen System $al\frac{dy}{y} = l.y = x$.

§. 1085. **Lehrsatz.** Man setze $y = 1 + u$, so verwandelt sich, weil $dx = \frac{ady}{y}$, der Ausdruck in $a.\frac{d.(1+u)}{1+u} = a.\frac{du}{1+u} = dx$. Denn $1 + u$ differenzirt $= du$, weil 1 Constans. Diß gibt eine unendliche Reyhe nach §. 157. wo

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4. - -$$ folgl.

$$\frac{a.du}{1+u} = a(du - udu + u^2du - u^3du + u^4du. - -)$$

$$al\frac{du}{1+u} = a(u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{5}u^5 - - -)$$

wo die Const. $= 0$ für $u = 0$, weil $l.1 = 0$. also $l.1 + u = x = s\frac{du}{1+u}$ wenn $a = 1$.

§. 1086.

§. 1086. Zuſatz. Eben ſo iſt

$$\frac{a.-du}{1-n} = a.-du(1+u+u^2+u^3\ldots)\ §.\ 162.$$

$$\int.\frac{a.-du}{1-u} = a.(-u-\tfrac{1}{2}u^2-\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4\ldots)$$

§. 1087. Zuſatz. Man kann alſo eine ſich ſchneller nähernde (ſchneller convergirende) Reyhe finden, wenn man die letztere Reyhe von der erſten ſubtrahirt, durch welche Operation nach §. 305. l. $\frac{1+u}{1-u}$ herauskommt; weil die Diviſion ſich bey den Logarithmen in eine Subtraction verwandelt; folglich

$$(l\,1+u) = a.(+u-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4+\tfrac{1}{5}u^5\ldots)$$
$$(l\,1-u = a.(-u-\tfrac{1}{2}u^2-\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4-\tfrac{1}{5}u^5\ldots)$$

subtr.

$$l.\frac{1+u}{1-u} = a.2u+2.\tfrac{1}{3}u^3+2.\tfrac{1}{5}u^5\ldots$$
$$= a.2(u+\tfrac{1}{3}u^3+\tfrac{1}{5}u^5+\tfrac{1}{7}u^7\ldots)$$

§. 1088. Exemp. So finden ſich die natürlichen Logarithmen der erſten 10 Zahlzeichen, wenn man ſetzt

Erſtl. $u = \frac{1}{5}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{\frac{5}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{6}{5}:\frac{4}{5} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

II. $u = \frac{1}{7}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{8}{7}:\frac{6}{7} = \frac{56}{42} = \frac{4}{3}$

III. $u = \frac{1}{9}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{10}{9}:\frac{8}{9} = \frac{90}{72} = \frac{5}{4}$

IV. $u = \frac{1}{99}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{100}{99}:\frac{98}{99} = \frac{9900}{9702} = \frac{50}{49}$.

Nun ſuche man für die kleine Brüche $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{50}{49}$ die Logarithme, welches leicht geſchiehet, weil die Brüche für u klein ſind.

sind. Hat man diese, so hat man auch die Logarithme für die 10 erste Zahlzeichen bald gefunden; denn es ist, weil die Multiplication bey Logarithm. in eine Addition sich verwandelt;

I. $l.\frac{3}{2} + l.\frac{4}{3} = l.\frac{3}{2}.\frac{4}{3} = l.\frac{12}{6} = l.2.$

II. $l.\frac{3}{2} + l.2 = l.\frac{3}{2}.2 = l.\frac{6}{2} = l.3.$

III. $2l.2 = l.2^2 = l.2.2 = l.4.$

IV. $l.\frac{5}{4} + l.4 = l.\frac{5}{4}.4 = l.\frac{20}{4} = l.5.$

V. $l.2 + l.3 = l.2.3 = l.6.$

VI. $2l.5 + l.2 = l.5^2.2 = l.25.2 = l.50$ aber

$l.50 - l.\frac{50}{49} = l.50 : \frac{50}{49} = l.\frac{50.49}{50} = l.49;$

und endlich $\frac{1}{2}l.49 = l.49^{\frac{1}{2}} = l.\sqrt{49} = l.7.$

VII. $3l.2 = l.2^3 = l.2.2.2. = l.8.$

VIII. $2l.3 = l.3^2 = l.3.3 = l.9.$

IX. $l.2 + l.5 = l.2.5 = l.10.$

So ist der Logarithmus von 10 in Zahlen wirklich nach der Decimalprogression ausgedruckt

$2,\ 3025850929940456840179914.$

§. 1089. Erklär. Wenn man in dem Ausdruck $l.\frac{ady}{y} = ly$ setzet $a = 1$, so heissen die herauskommende Logarithmen natürliche Logarithmen, und die andere nach den Abscissen und Subtangenten sind künstliche.

§. 1090. Zusatz. Weil $dx = \frac{adu}{1+u}$ so ist umgekehrt $dx + udx = adu$, und $dx = adu - udx$, und $du - \frac{udx}{a} = \frac{dx}{a}$; folglich läßt sich die Zahl u umgekehrt durch den Logarithmen ausdrucken, und zwar in einer unendlichen Reyhe.

§. 1091.

§. 1091. Wenn *Fig.* 117. eine Apollonische Hyperbel ist, deren Potenz = 1, und AP = 1 + u, PM = y, so ist nach §. 936. y(1+u) = 1, und $y = \frac{1}{1+u}$ folglich das Flächendifferential ydu = du.

$\frac{1}{1+u} = d(l\,1+u)$; also wird die Hyperbel durch die logarithmische Reyhen quadrirt, und dahero heißt man die natürliche Logarithmen auch hyperbolische Logarithmen, wegen ihrer Uebereinstimmung mit der Quadratur der Hyperbel. Uebrigens gehören auser der natürlichen Logarithme einer jeden Zahl noch unzählich viel unmögliche Logarithmen zu, wie Herr Prof. Euler bewiesen hat Anal. Inf. L. I. C. 6. 7. daher die logarithmische Linie eine transscendentische ist.

Die Exponentialrechnung nebst einigen Integralformeln für logarithmische Differentialien.

§. 1092. **Erklär.** Wenn der Exponent einer Gröse veränderlich ist, also x, y, z heißt, so heißt die Gröse selbst eine **Exponentialgröse**; z. E. a^x, b^y, x^y, y^z.

§. 1093. **Lehrsatz.** Die Exponentialgrösen werden differenzirt, wenn sie auf logarithmische Ausdrücke reducirt werden. Denn es sey

$x^y = z$ so ist nach §. 308.

$ylx = lz$ also differenzirt

lxdy

$lxdy + ydlx = d.lz$ aber

$$dlx = \frac{dx}{x}$$ folglich substituirt

$$lxdy + y\frac{dx}{x} = d.lz = \frac{dz}{z}.$$

§. 1094. **Zusatz.** Erinnert man sich noch, daß die Exponenten die Logarithmen der Potenzen sind, so wird man sich in diese Regel finden; auch schliessen, daß eine jede Exponentialgröse sich in eine logarithmische Reyhe verwandeln lasse.

§. 1095. **Lehrsatz.** Das Integrale von $\frac{dx}{1-xx}$ ist $= \frac{1}{2}l\frac{1-x}{1+x}$.

Satz. $\frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{2}l.\frac{1-x}{1+x}$.

Beweis.

Es sey $dy = \frac{dx}{1-xx} = dx.\frac{1}{1-x^2}$ so ist

weil $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$ so ist

$$dy = dx\left(\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}\right)$$

Es sey

$2+2x = u$ und $2-2x = z$ so ist

$2dx = du$ $\quad -2dx = dz$

$dx = \frac{1}{2}du$ $\quad -dx = -\frac{1}{2}dz$ flg.

$$dx.\frac{1}{2+2x} = \frac{1}{2}du:u \qquad dx.\frac{1}{2-2x} = -\frac{1}{2}dz:z$$

das ist $= \frac{du}{2u}$ $\quad = -\frac{dz}{2z}$

welches also erwiesen wird: man bringe beede Brüche unter einerley Benennung, so ist

$$\frac{1.2(1-x)+1.2(1+x)}{2(1+x).2(1-x)} = \frac{2+2x+2-2x}{4-4y^2}$$

d. i. wenn man $2x$ gegen $-2x$ aufhebt $= \frac{4}{4-4xx}$

oder $= \frac{1}{1-x^2}$

folglich $dy = \frac{du}{zu} - \frac{dz}{z}$, ein logarithm. Differential; also

$y = \frac{1}{2}lu - \frac{1}{2}lz$ und den Wehrt von u und z substituirt,

$y = \frac{1}{2}l(z+zx) - \frac{1}{2}l.(z-zx) = \frac{1}{2}l.\frac{2+2x}{2-2x}$ weil die Logarithm. die Division in eine Subtraction verwandeln;

oder $y = \frac{1}{2}l.\frac{1+x}{1-x}$ wenn man mit z aufhebt.

Joh. Bernoulli Vergleichung der Ausschnitte des Cirkels und der Hyperbel.

§. 1096. Lehrsatz. Es sey ein Cirkelbogen v, seine Tangente heisse $= q$, so ist $dv = \frac{dq}{1+qq}$ nach §. 1073. und wenn der Radius $= 1$, der correspondirende Sector $\frac{1}{2}dv = \frac{\frac{1}{2}dq}{1+qq}$; denn wenn man den Bogen in den halben Radius multiplicirt, so hat man den Sector nach der Element. Geom.

Man suche nun den correspondirenden hyperbolischen Ausdruck, wenn die Tangente der Hyperbel $= p$; da dann $dv = \frac{dp}{1-pp}$ und $\frac{1}{2}dv = \frac{\frac{1}{2}dp}{1-pp}$; weil, wie wir sogleich zeigen, der Ausdruck für die Hyperbel nur umgekehrt ist, oder das negative Zeichen hat; diese beede Sectores solle man nur mit einander vergleichen.

Man setzt also, wenn die Vergleichung angehen solle,

$1+qq$

$+qq = -pp$. dahero wenn man die Wurzel ausziehet $q = p\sqrt{-1}$.

und

nr. I. $\frac{q}{\sqrt{-1}} = p$ das ist nach §. 336.

$-q\sqrt{-1} = p$ folglich substituirt

$\frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}\frac{dp\sqrt{-1}}{1-pp}$ da nun

$\int\frac{1}{2}\frac{dp}{1-pp} = \frac{1}{2}l.\frac{1+p}{1-p}$ nach §. 1095. so ist nr. II.

$\frac{1}{2}\int dv = \frac{\sqrt{-1}}{2}l.\frac{1+p}{1-p}$ u. weil $+p = -q\sqrt{-1}$ nr. I. folgl. $-p = +q\sqrt{-1}$; so ist nr. III. wenn man substit. $\frac{\sqrt{-1}}{2}l.\frac{1-q\sqrt{-1}}{1+q\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\int dv$.

dieser Ausdruck verwandelt sich in folgenden, wenn man immer $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ für $-\sqrt{-1}$ und umgekehrt nach §. 336. setzt,

$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}.l.\frac{1-q\sqrt{-1}}{1+q\sqrt{-1}}$ und die Zeichen verändert

$+\frac{1}{2\sqrt{-1}}l.\frac{1+q\sqrt{-1}}{1-q\sqrt{-1}}$ und nochmal subst. $\frac{1}{\sqrt{-1}}$

$+\frac{1}{2\sqrt{-1}}.l.\frac{1+q.\frac{1}{\sqrt{-1}}}{1+q.\frac{-1}{\sqrt{-1}}}$ woraus der letztere Ausdruck unter einerley Benennung, weil der Divis. $\sqrt{-1}$ einerley, $\sqrt{-}$

$\frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$; also ist das ganze Integral

$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l. \frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$.

§. 1097. **Zusatz.** Hieraus folgt, daß der Ausschnitt des Cirkels einem unmöglichen oder eingebildeten Ausschnitt (imaginario Sectori) der Hyperbel und umgekehrt gleich sey. Die Ursache davon ist folgende: r sey zugleich der Radius des Cirkels und die halbe Axe der Hyperbel; so ist, wenn die Ordinate des Cirkels y und der Hyperbel z, die Gleichung $y^2 = r^2 - x^2$; und $z^2 = x^2 - r^2$; jenes ist nur möglich, wenn $x < r$; und dieses wenn $x > r$; also wenn der einen Linie Ausschnitte möglich werden, sind der andern unmöglich, und umgekehrt.

§. 1098. **Erklär.** Der **hyperbolische Ausschnitt** und dessen Ausdruck $l(1+u)$ kann auch aus der Figur erwiesen werden; denn *Fig.* 117. heißt der Ausschnitt CAM ein hyperbolischer Ausschnitt; er entsteht, wenn aus dem Mittelpunkt A nach dem Scheitel C und einem andern willkührlichen Punkt M gerade Linien gezogen werden.

§. 1099. **Lehrsatz.** Das Element von diesem Sector läßt sich nun finden, und daraus eine Integralformel geben.

Denn es sey CAm ein anderer Ausschnitt, so ist die Differenz beeder Ausschnitte MAm.

Man

Man nehme AM als einen Radius und beschreibe den Bogen MR damit, so hat man das Maas des Winkels MAm.

ferner ist $Rm = Am - AR$. aber

$$AR = AM$$

$$Rm = Am - AM.$$

Gesetzt nun, die Punkte M und m seyen unendlich nahe beysammen, so ist MR ein Perpendikel auf Am, Mm eine gerade Linie, und MAm ein geradelinigtes Dreyeck, dessen Inhalt nach geometrischen Gründen $= \frac{MR \cdot Am}{2}$; nemlich die Höhe mit der Grundlinie multiplicirt, und durch zwey dividirt; dafür man, weil Rm unendlich klein, setzen kann $\frac{AM \cdot MR}{2}$. Dieser Ausdruck $\frac{AM \cdot MR}{2}$ ist das Differential vom hyperbolischen Sector CAM.

Man nenne die Abscisse $AP = w$, so ist

nr. I. die Ordinate $PM = \frac{1}{w}$ nach §. 936.

denn wenn die Potenz $= 1$, so ist $1 = wy = PMAP$.

folglich

$$\frac{1}{w} = y = PM.$$

nr. II. Tang. $MAP = \frac{PM}{w} = \frac{1}{ww}$ weil

$AP : PM = 1 : T.MAP$ das ist

$w : PM = 1 : \frac{PM}{w}$ aber

$$PM = \frac{1}{w}$$ folgl. subst.

$$\frac{PM}{w} = \frac{1}{w} : w = \frac{1}{ww} = W^{-2}$$ nach §. 180.

also das Differ. von $\frac{1}{ww} = -2W - 3dW = -\frac{2dw}{w^3}$

und das Differential des Winkels MAP, welches aus den Tangenten nach §. 1073. gefunden wird $da = \frac{dt}{1+tt}$, hier den Wehrt von t

substituirt, gibt diff. $MAP = -\frac{2dw}{w^3} : \left(1+\frac{1}{w^4}\right) = -\frac{2dw}{w^3} : \left(\frac{w^4+1}{w^4}\right)$

und wenn man wirklich dividirt, das ist mit dem umgekehrten dividirenden Bruch multiplicirt,

$$-\frac{2w^4dw}{w^3(w^4+1)} = -\frac{2wdw}{w^4+1}$$ wenn man richtig aufhebt;

aber eben diß Differential ist = MAm;

aber dieser Winkel $MAm = \frac{MR}{AM}$ §. 582.

---

folglich $-\frac{2wdw}{w^4+1} = \frac{MR}{AM}$

$$-\frac{2wdw}{w^4+1} \cdot AM = MR$$

$$-\frac{2wdw}{w^4+1} \cdot \frac{AM}{2}$$

$$-\frac{wdw}{w^4+1} \cdot AM^2 = \frac{MR \cdot AM}{2} =$$ diff. Sectoris.

aber $AM^2 = AP^2 + MP^2$ nach dem Pyth. Lehrsatz.

$= w^2 + \frac{1}{w^2}$ nr. I. und unter einerl. Benenn.

$= \frac{w^4+1}{w^2}$

---

folglich subst. $-\frac{wdw}{w^4+1} \cdot \frac{w^4+1}{w^2} = \frac{MR \cdot AM}{2}$ d. i. wirkl. multipl. und aufgehoben

$$-\frac{wdw}{w^2} = -\frac{dw}{w} = \frac{MR \cdot AM}{2} =$$ diff. Sect.

es sey $w = 1+u$, so ist, weil $\frac{1}{w} = PM = y$

substituirt $-\frac{1}{w} \cdot dw = -y \cdot du$ oder

$-\frac{dw}{w} = -ydu$ oder $+\frac{dw}{w} = ydu$ dessen

Integral = l. (1+u) wo Const. = 0.

§. 1100

§. 1100. Anm. Der Ausdruck wird affirmativ, weil CAM $= 45° -$ AMP, dahero $dCAM = -d.PAM = +\frac{zwdw}{1+w^4}$. Denn es wurde oben nur deßwegen negativ, weil die nächstfolgende Winkel nach PAM kleiner werden, indeme man aus dem Winkel PAM das Differential sucht.

§. 1101. Anm. Wenn man die Ausschnitte aus dem Mittelpunkt der Axe durch die Abscissen ausdruckt, so wird, wenn man überall richtig substituirt, und der Radius $= 1$, und die Tangente p ist, das Integral $\frac{1}{4}\frac{l.1+p}{1-p}$, woraus obige Vergleichung §. 1096. erläutert wird. Die Rechnung ist leicht, aber weitläuf ig, daher wir sie übergehen.

Einige andere Vergleichungen der Sinus, Cosinus, Tangenten, nach Joh. Bernoulli Methode.

§. 1102. Lehrsatz. Aus der Tangente x des einfachen Bogens, läßt sich die Tangente y des nfachen Bogens finden. Weil die Tangenten x, y sind, so ist nach §. 1073. die Formel

$$\frac{ndx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$$ folglich

$$\frac{nfdx}{1+x^2} = \frac{fdy}{1+y^2}$$ also nach §. 1096. wo für p gesetzt wird x, und q gesetzt y,

$$\frac{n}{2\sqrt{-1}}.l.\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}l.\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$$ und wenn man die Zeichen der Logarithmen wegläßt nach §. cit.

$$\frac{(\sqrt{-1}-x)^n}{(\sqrt{-1}+x)^n} = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$$

Man suche nun eine Gleichung zwischen des Winkels φ und $n\varphi$ seinem Sinus und Cosinus.

Man setze $x = \frac{b}{\beta}$ $y = \frac{p}{\pi}$ nach §. 720. nr. III. wo $b = \sin. \varphi$, $\beta = \cos. \varphi$; und $p = \sin. n\varphi$; $\pi = \cos. n\varphi$. Endlich setze man, um die Rechnung bequemer zu machen $\sqrt{-1} = \varepsilon$, so verwandelt sich der obige Ausdruck

$$\frac{(\sqrt{-1}-x)^n}{(\sqrt{-1}+x)^n} = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$$ in folgende Gleichung

$$\frac{\left(\varepsilon - \frac{b}{\beta}\right)^n}{\left(\varepsilon + \frac{b}{\beta}\right)} = \frac{\varepsilon - \frac{p}{\pi}}{\varepsilon + \frac{p}{\pi}}$$ das ist, unter einerley Benennung

$$\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$$; aber es ist

nr. II. $\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}$ wie §. 1103. gezeigt werden soll.

$$\frac{}{\left(\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}\right)^n} = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$$

Es ist ferner

nr. III. $\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{(\beta + b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)}{(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)}$ wie leicht erhellet nach §. 56.

aber der Divisor $(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon) = 1$ denn

das wirkl. Product $\beta^2 - b^2\varepsilon^2 = (\cos.\varphi)^2 - (\sin.\varphi.)^2 - 1$

wenn man die Wehrte $= (\cos.\varphi)^2 + (\sin.\varphi)^2 = 1$

substituirt, wo auch

$\varepsilon^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ wird.

folgl. $\frac{\beta+b\varepsilon}{\beta-b\varepsilon}=(\beta+b\varepsilon)^2$ da aber oben nr. II.

$\frac{\beta+b\varepsilon}{\beta-b\varepsilon}=\frac{\varepsilon\beta-b}{\varepsilon\beta+b}$ so ist

$\frac{\varepsilon\beta-b}{\varepsilon\beta+b}=(\beta+b\varepsilon)^2$ folgl. zur Potenz n elevirt, nach §. 184.

$\frac{(\varepsilon\beta-b)^n}{(\varepsilon\beta+b)^n}=(\beta+b\varepsilon)^{2n}$ da aber nr. I.

$\left(\frac{\varepsilon\beta-b}{\varepsilon\beta+b}\right)^n=\frac{\varepsilon\pi-p}{\varepsilon\pi+p}$ so ist

nr. IV. $(\beta+b\varepsilon)^{2n}=\frac{\varepsilon\pi-p}{\varepsilon\pi+p}$.

Weil endlich auf eine ähnliche Weise wie nr. II. III. $\frac{\varepsilon\pi-p}{\varepsilon\pi+p}=(\pi+p\varepsilon)^2$ gefunden wird; so ist

nr. V. $\left(\frac{\varepsilon\beta-b}{\varepsilon\beta+b}\right)^n=(\pi+p\varepsilon)^2$. oder nach nr. IV.

$(\beta+b\varepsilon)^{2n}=(\pi+p\varepsilon)^2$ das ist im Wehrt der Buchstaben

$(\cos.\varphi\pm\sin.\varphi\sqrt{-1})^n=\cos.n\varphi\pm\sin.n\varphi\sqrt{-1}$.

wie schon §. 751. unabhängig von diesen Gründen gezeigt worden.

§. 1103. Anm. Daß $\frac{\varepsilon\beta-b}{\varepsilon\beta+b}=\frac{\beta+b\varepsilon}{\beta-b\varepsilon}$ erhellet, wenn man den Wehrt von ε subſtituirt, und $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ mit $-\sqrt{-1}$ gehörig nach §. 336. verwechſelt; denn in dieſem Wehrt iſt der erſte

Ausdr. $\frac{\sqrt{-1}\beta - b}{\sqrt{-1}\beta + b} = \frac{\beta - b}{-\sqrt{-1}} : \frac{\beta + b}{\cdot\sqrt{-1}} = \frac{\beta - b}{-\sqrt{-1}} \cdot \frac{-\sqrt{-1}}{\beta + b}$

$= \frac{-\sqrt{-1}\beta + b\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}\beta - b\sqrt{-1}} = \frac{\beta + b\sqrt{-1}}{\beta - b\sqrt{-1}} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}$,

wenn man ε wieder substituirt.

§. 1104. Anm. Diese Methode hat Joh. Bernoulli in den Act. Erud. 1712. bekannt gemacht, und noch viele andere nützliche Folgen daraus hergeleitet.

Herrn Eulers und Clairaut Betrachtungen über die Differentiale der Functionen, die zwo und mehr veränderliche Grösen enthalten.

§. 1105. Lehrsatz. Es sey V eine Function von xy, oder x, y vermischt; man differenzire V dergestalten, daß man zuerst nur x veränderlich setzt, und das Differential wieder, aber so, daß man nur y veränderlich setzt; zweytens differenzire man V auch so, daß man nur y veränderlich, und diß Differentiale wieder, aber so, daß man nur x veränderlich setze, so wird die zweyte Differentiation in beeden Fällen gleich seyn. Denn es sey

$V = xy$ so ist nach

nr. I. ydx erstes Differential: $dydx$ zweytes Differ.
nr. II. xdy erstes Differential: $dxdy$ zweytes Differ.

aber $dydx = dxdy$, folglich gibt die zweyte Differentiation allemal in diesem Fall und unter der gegebenen Bedingung einerley Differentiale.

§. 1106.

§. 1106. **Zusatz.** Eben so wird man finden, daß, wenn man bey drey veränderlichen Grösen xyz auf eben diese Bedingungen differenzirt, das drittemal einerley herauskomme; und so geht das Gesetz bey mehrern veränderlichen Grösen fort, wenn keine von der andern bestimmt wird; und man also, welche man will, unveränderlich annehmen kann.

§. 1107. **Willk. Satz.** $\frac{dV}{dy}$ bedeute, daß V so differenzirt werde, daß nur y als veränderlich angenommen worden. Ferner, man heisse bey einer Differentialgröse, wo x, y und ihre Differentiale vermischt sind, alles dasjenige P was in dx, und alles dasjenige Q was in dy multiplicirt wird.

§. 1108. **Lehrsatz.** Wenn $dV = Pdx + Qdy$, so ist $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Bew.

$dV = Pdx + Qdy$ nach der Voraussetz. folglich $\frac{dV}{dx} = P$ und $\frac{dV}{dy} = Q$ man differ. nun noch einmal nach §. 1105.

so ist $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$ nach eben diesem §.

§. 1109. **Anm.** Um den zweyten Satz, daß $\frac{dV}{dx} = P$, und $\frac{dV}{dy} = Q$, besser zu verstehen, merke man folgenden Lehrsatz.

§. 1110. **Lehrsatz.** Jede gleichartige Function von x, y läßt sich, wenn $y = zx$ gesetzt wird, durch ein Product aus einer Potenz von x in eine Function von z ausdrucken.

Bew.

Bew.

A, B seye die Function x, y; Z, W von z,
oder es sey $A = x^{\lambda} Z$

$B = x^{\varkappa} W$ so ist dividirt

$$\frac{A}{B} = x^{\lambda - \varkappa} \frac{Z}{W}$$

es sey $\frac{Z}{W} = T$ eine Function von z, und

$\lambda - \varkappa = n$; und $\frac{A}{B} = V$; so ist

$V = x^n . T$, und $dV = n x^{n-1} T dx + x^n dT$.

§. IIII. Zusatz. Es sey $dT = Rdz$, so ist
$dV = dx^{n-1} T dx + x^n dT$; es sey ferner
$dV = Pdx + Qdy$. aber
$dy = xdz + zdx$ weil $y = zx$ oben ge-
setzt ist;

$dV = Pdx + Qzdx + Qxdz$;
$dV = nx^{n-1} Tdx + x^n Rdz$

nur bestimmen x und y einander nicht, also vergl. gibt

$Pdx + Qzdx + Qxdz = nx^{n-1} Tdx + x^n Rdz$

also gibt es eine Gleichung zwischen den Gliedern die dx, und eine andere zwischen denen, die dz enthalten; folglich ist

I. $Pdx + Qzdx = nx^{n-1} Tdx$: dx

$P + Qz = nx^{n-1} T$

II. $Qxdz = x^n Rdz$ dz

$Qx = n^n R$

aber es ist $nx^{n-1} T = \frac{nV}{x}$

$P + Qz = \frac{nV}{x}$

z =

$z = \frac{y}{x}$ nach §. 1119.

$$\frac{P + Q\frac{y}{x} = \frac{nV}{x}}{Px + Qy = nV.} \; x$$

§. 1112. **Will. Satz.** Wenn P eine Function von xy zugleich ist, und man integrirt Pdx so, daß man y unveränderlich, und nur x für veränderlich ansieht, so druckt man das Integral aus $\int(x)Pdx$. z. E. $\int(x)yx^3dx = \frac{1}{4}yx^4$, wo y unveränderlich angenommen worden.

§. 1113. **Zusatz.** Also das Differential von $\int(x)Pdx = Pdy$, wenn nur x veränderlich ist; ist aber die Function von x, y vermengt, die V heissen soll, so ist, wenn beede Grösen veränderlich sind $dV = Pdx + Gdy$; wo wiederum $\frac{dV}{dx} = P$.

§. 1114. **Lehrsatz.** Wenn $\int Pdx + Qdy = Z$, und $Q = G + H$, so wird H kein x enthalten, sondern eine Function blos von y seyn.

Bew.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \\ \frac{dP}{dy} = \frac{dG}{dx} \end{array}\right\} \text{ nach §. 1108.}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dQ}{dx}.$$

$Q = G + H$ nach der Voraussetzung

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d(G+H)}{dx.} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx}$$ also

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx}$$ das ist

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dx} + o$$ also $\frac{DH}{dx} = o$; das ist

H kann kein x enthalten.

§. 1115. Erläuterung. Man suche das Integral aus $3x^2y^2dx + (2yx^3 + 4ay^3)dy = dZ$ nach dieser Formel, so ist nach §. 1108.

$P = 3x^2y^2$; und $Q = (2yx^3 + 4ay^3)$ folgl.

$dP = 6x^2ydy$, wo x unveränderl. angesehen wird; und $\frac{dP}{dy} = 6x^2y$.

Dieser Ausdruck ist $= \frac{dQ}{dx}$ weil $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ nach §. 1108. folglich

$6x^2y = \frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$. Es ist ferner

$V = \int(x)Pdx$ nach §. 1113. und weil

$P = 3x^2y^2$ so ist

$Pdx = 3x^2y^2dx$ und integrirt nach den gewöhnl. Regeln,

$\int(x)(Pdx) = x^3y^2$ wo y unveränderlich; also

$V = x^3y^2$ folglich

dV =

$dV = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$. wo x, y veränderlich, also $G = 2x^3y$; $H = 4ay^3$, und dahero

$Z = x^3y^2 + ay^4$; das Integral;

denn wenn man dieses Integral wirklich wieder nach den allgemeinen bekannten Regeln differenzirt, so kommt der erste im Exempel gegebene Ausdruck wieder heraus, nemlich das Differential oder $d(x^3y^2 + ay^4) = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy + 4ay^3dy$.

§. 1116. Anm. Der Gebrauch von den hier kürzlich berührten Sätzen zeiget sich bey verschiedenen schweren Integrationen. Herr Prof. Euler und Herr Clairaut haben sie jeder für sich erfunden und bekannt gemacht, jener in Inst. Calc. diff. P. I. c. 7. dieser in Mem. de l'Acad. des Sciences à Paris 1740. unter dem Titel: sur l'integration des équations differentielles; Herr Prof. Kästner und Herr Prof. Karsten haben sie in ihren Schriften erläutert.

Die Lehre von der Evolution, Evoluten, und aus Evolution erzeugten Linien, den Krümmungscirkeln und Radiis, (circulis curvaturæ, radiis osculi.)

§. 1117. Erklär. Wenn *Fig.* 121. NV = NM Sehnen einer krummen Linie sind, und durch deren Punkte M, N, V ein Cirkel beschrieben wird, dessen Mittelpunkt K sich geometrisch bestimmen läßt, so heißt der Cirkel (circulus curvaturæ) der **Krümmungscirkel** (auch circulus osculator) und sein Radius MK ist der Radius osculi. Man setzt aber voraus, daß die Punkten

V,

V, M sich dem Punkt unendlich nähern, und in dieser unendlich kleinen Distanz werden sie vom Krümmungscirkel berührt. Die Linien MH, NN seyen Tangenten der krummen Linie; dahero HW eine Tangente zugleich vom circulo curvaturæ ist; THD ist der Krümmungswinkel (Angulus curvaturæ).

§. 1118. Lehrsatz. Man heisse den Centriwinkel $MKN = x$, so ist $MNH = \frac{1}{2}x$.

Bew.

$MNH = HNK - MNK = 90 - MNK$. aber nach §. 469.
$MNK = 180° - x = 90 - \frac{1}{2}x$

$MNH = 90 - (90 - \frac{1}{2}x) = 90 - 90 + \frac{1}{2}x$. das ist $MNH = \frac{1}{2}x$.

§. 1119. Lehrsatz. Wenn die Punkten M, V sich unendlich nähern, so wird zulezt der Winkel $THD = x$.

Bew.

$HNM = 180° - WNV - MNV$ §. 443.
$MNV = 2MNK$

$HNM = 180° - WNV - 2MNK$

$MNK = \frac{180 - x}{2}$

V.

HNM

HNM = 180° — WNV — ½(180 — x) das ist
HNM = 180 — WNV — 180 + x = x — WNV
es sey WNV = HMN + d. HMN. so ist
HNM = x — HMN — dHMN. folgl. ist herübergesetzt
HNM + HMN + dHMN = x aber
HNM + HMN = THD nach §. 470. folgl. subst.
THD + dHMN = x. wenn nun dHMN unendlich abnimmt, so wird endlich THD = x.

§. 1120. Lehrsatz. Der Radius osculi MK ist $\frac{ds}{THD}$.

Bew.

MK = ½MN : sin. ½x. nach trigonometrischen Gründen. Wenn aber M, N sich unendlich nähern, so wird aus der Sehne MN der unendlich kleine Bogen; und verwandelt sie sich also in ds; eben so verwandelt sich sin. ½x in ½x selbst; aber ½x = ½ THD; folgl. MK in diesem Fall ½MN : ½THD = MN : THD = $\frac{ds}{THD}$.

§. 1121. Anm. Aus der Gleichung für die krumme Linie muß hernach ds und THD bestimmt werden; THD ist nemlich der Krümmungswinkel, welcher aus der Natur der krummen Linien zu bestimmen ist; wir haben nur die Art anzeigen wollen, wie es geschieht; die Rechnung würde hier zu weitläuftig seyn. Zu einer vollständigen Ausführung gehört auch die Lehre von den Wendungen und Rukkehrpunkten, wenn eine krumme Linie bald die hohle, bald die erhabene Seite herauskehrt, wie eine Schlangenlinie, und die Tangenten also bald oberhalb bald unterhalb der Linien liegen; allein die Hauptbegriffe davon sind schon hier vorgetragen; und man wird aus dem bisherigen in den Stand gesetzt werden, Schriften davon lesen zu können, wenn man sich in diese Materie einlassen will, die eben keinen so grosen Einfluß, wie die übrige in die angewandte Mathematik

haben, und endlich in einem Compendio eher als in Quartanten von Elementen der Mathematik, wo sie nicht einmal genannt sind, nur kürzlich berühret werden dörfen.

§. 1122. **Erklärung.** Die Evolution zu verstehen, muß man nur auf zwo krumme Linien acht haben: die eine ist diejenige, von welcher die krumme Linie durch Abwickluug entsteht; die andere ist die abgewickelte Linie selbst. Man setze eine krumme Linie von was für einer Gattung man will, nur daß sie keinen Wendungs- oder Rukkehrpunkt habe, um deren erhabene (convexe) Seite ein Faden gewunden sey; man winde den Faden so ab, daß er immer gespannt bleibe oder eine gerade Linie mache; so wird der Endpunkt oder die Extremität des Fadens eine krumme Linie beschreiben, welche (curva ex evolutione genita) die aus der Abwicklung erzeugte krumme Linie heißt, die Linie aber, von welcher der Faden abgewickelt wird, heißt die Evoluta. Der gespannte Faden kann den Radius osculi vorstellen, der aber alle Augenblick sich ändert, und also, wie oben, nur in dem Fall, wenn zween Punkten der neu entstandenen krummen Linie unendlich nahe sind, sich gleich bleibet.

§. 1123. **Zusatz.** Es sey *Fig.* 118. AC die Evolute, so ist DEA, die ex evolutione genita, und der Radius osculi = DA + AC = EC; denn der Faden kann auch von A nach D vorher schon, ehe er sich abwickelt, in eine gerade Linie ausgespannt seyn.

§. 1124.

§. 1124. **Lehrsatz.** Aus der Gleichung für die aus der Evolution erzeugte Linie läßt sich eine Gleichung für die Evolute finden.

Bew.

Es sey *Fig.* 118. DL die gemeinschaftliche Abscissenlinie für beyde curvas, DE und AC. Man setze DA sey = x, AE = y, und die Coordinaten rechtwinklicht; ferner DL = v, LC = t, EC = z, und EO = w. Es ist aber

EO : EA = OC : CL und
EO : OC = EA : CL
EO + OC : EO = EA + CL : EA das ist
EC : EO = EA + CL : EA. und transp.
EO : EA = EC : EA + CL. also in Buchstaben

$$w : y = z : \frac{yz}{w} = t + y. \text{ folglich}$$

$$\frac{yz}{w} - y = t. \text{ das ist}$$

$$\frac{yz - yw}{w} = \frac{(z - w)y}{w} = t.$$

Nun ist

nr. I. EO : OA = OC : OL und versetzt
EO : OC = OA : OL und addendo
EO + OC : OC = OA + OL : OL das ist
in der Figur
EC : OC = AL : OL und versetzt

nr. II. EC : AL = OC : OL aber
OC : OL = EO : OA nr. I.

EC : AL = EO : OA oder umgekehrt
EO : OA = EC : AL
= v — x = DL — DA.

§. 1125. **Zusatz.** Wenn also die aus der Evolution erzeugte Linie algebraisch ist, so ist auch ihre Evolute algebraisch, aber nicht umgekehrt.

§. 1126. Anm. Die Lehre von der Evolution hat Herr Prof. Euler Comm. Ac. Imp. Petrop. T. XII. am vollständigsten abgehandelt. Der erste, der davon was gemeldt, war Hugenius, der die Cycloide beschrieben, als eine krumme Linie, die ihrer Evolute, dem Cirkel, gleich ist. Der Nutzen davon zeigt sich in dem Horologio oscillatorio, und überhaupt in der Mechanik. Ausser dieser, nemlich der Cyclois, davon wir in verschiedenen Stellen gehandelt, schienen die Betrachtungen über die Evolution, wenn man den Nutzen, den man bey Integrationsformeln hat, ausnimmt, mehr zu einer mathematischen Speculation zu dienen, als daß sie von besonderem Gebrauch wären. Jac. Bernoulli hat sich auf diese Weise an der logarithmischen Spirallinie, die seine Erfindung war, ungemein ergötzt, weil sie nach unzählichen Veränderungen und Wendungen, wodurch sonst in andern Fällen andere krumme Linien entstehen, sich dennoch selbst immer wieder darstellt; zu welchem Ende er sie auch als ein Sinnbild der Auferstehung mit der Innschrift: Eadem mutata resurgo, auf seinen Grabstein setzen liesse.

§. 1127. Anm. Diß ist nun dasjenige, was wir von der höhern Geometrie in dem gegenwärtigen Compendio vortragen wollten; wir glauben nicht, daß irgend eine Materie von Wichtigkeit übergangen worden sey, und dürfen uns dißfalls auf solche Leser berufen, welche Kenner von der Sache sind, und wissen, wie man solche Lehren in einem Auszug vortragen solle, damit man im folgenden einen Nutzen davon habe, und in den Stand gesetzt werde, weitere mathematische Schriften mit Nutzen zu lesen. Unsere nächste Beschäftigung wird also auf die angewandte Mathematik gehen, worinnen nach dem bisherigen Plan fortzuarbeiten uns angelegen seyn wird.

Die

nr. II. EC : AL = OC : OL aber
OC : OL = EO : OA nr. I.

EC : AL = EO : OA oder umgekehrt
EO : OA = EC : AL
= v — x = DL — DA.

§. 1125. **Zusatz.** Wenn also die aus der Evolution erzeugte Linie algebraisch ist, so ist auch ihre Evolute algebraisch, aber nicht umgekehrt.

§. 1126. Anm. Die Lehre von der Evolution hat Herr Prof. Euler Comm. Ac. Imp. Petrop. T. XII. am vollständigsten abgehandelt. Der erste, der davon was gemeldt, war Hugenius, der die Cycloide beschrieben, als eine krumme Linie, die ihrer Evolute, dem Cirkel, gleich ist. Der Nutzen davon zeigt sich in dem Horologio oscillatorio, und überhaupt in der Mechanik. Ausser dieser, nemlich der Cyclois, davon wir in verschiedenen Stellen gehandelt, schienen die Betrachtungen über die Evolution, wenn man den Nutzen, den man bey Integrationsformeln hat, ausnimmt, mehr zu einer mathematischen Speculation zu dienen, als daß sie von besonderem Gebrauch wären. Jac. Bernoulli hat sich auf diese Weise an der logarithmischen Spirallinie, die seine Erfindung war, ungemein ergötzt, weil sie nach unzählichen Veränderungen und Wendungen, wodurch sonst in andern Fällen andere krumme Linien entstehen, sich dennoch selbst immer wieder darstellt; zu welchem Ende er sie auch als ein Sinnbild der Auferstehung mit der Innschrift: Eadem mutata resurgo, auf seinen Grabstein setzen liesse.

§. 1127. Anm. Diß ist nun dasjenige, was wir von der höhern Geometrie in dem gegenwärtigen Compendio vortragen wollten; wir glauben nicht, daß irgend eine Materie von Wichtigkeit übergangen worden sey, und dürfen uns dißfalls auf solche Leser berufen, welche Kenner von der Sache sind, und wissen, wie man solche Lehren in einem Auszug vortragen solle, damit man im folgenden einen Nutzen davon habe, und in den Stand gesetzt werde, weitere mathematische Schriften mit Nutzen zu lesen. Unsere nächste Beschäftigung wird also auf die angewandte Mathematik gehen, worinnen nach dem bisherigen Plan fortzuarbeiten uns angelegen seyn wird.

Die

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Clemm, Heinrich Wilhelm, 1725-1775 / Fridrich, Jacob Andreas, 1714-1779 / Eichler, Gottfried

Heinrich Wilhelm Clemms mathematisches Lehrbuch, oder vollständiger Auszug aus allen sowohl zur reinen als angewandten Mathematik gehörigen Wissenschaften nebst einem Anhang oder kurzen Entwurf der Naturgeschichte und Experimentalphysik
Bd.: 1

Stutgart 1777

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.1514(1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11110339-8
VD18 12058009-001